

**В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории.  
Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.**

**Вариант 1**

**A1.** Не знаете как сократить дробь? Дальше можете не читать. Да и на ЦТ по математике Вам лучше не ходить.

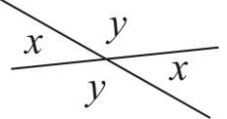
**Ответ:** 5.

**A2.** Очень простая задача. Все знают, что человеческое тело симметрично (да, есть минимальные отличия правой стороны тела от левой, но все же процентов на 99 тело симметрично). А теперь перенесите признаки симметрии человеческого тела на представленные геометрические фигуры и выясните, какая из них не имеет ось симметрии.

**Ответ:** 3.

**A3.** Делаем небольшой пояснительный рисунок. И сразу вопрос. Чему равна сумма углов  $x$  и  $y$ ? Правильно, 180 градусов. Следовательно, 260 это сумма двух **одинаковых** углов. То есть один из углов равен 130 градусов. Значит, меньший угол равен 50.

**Ответ:** 2.



**A4.** Несмотря на кажущуюся легкость примера многие имеют проблемы со знаком «минус» перед выражением. Сразу скажу, что знак «минус» самый коварный знак и причина большого количества глупых ошибок. Поэтому я покажу вам очень подробное решение этого примера. И не забываем, что выносить за скобки мы имеем право только одинаковые, а не похожие, множители.

$$y(x-8) - x(8-x) = y(x-8) - x(-1 \cdot (x-8)) = y(x-8) - x \cdot (-1)(x-8) = y(x-8) + x(x-8) = (x-8)(y+x)$$

**Ответ:** 5.

**A5.** При решении большого количества примеров по математике надо научиться видеть преобразования. В данном случае мы должны увидеть формулу сокращенного умножения – квадрат разности.

$$\frac{6,1^2 + 1,9^2 - 2 \cdot 6,1 \cdot 1,9}{14} = \frac{(6,1 - 1,9)^2}{14} = \frac{4,2^2}{14}$$

Ну а дальше надо просто аккуратно вычислить

$$\frac{4,2^2}{14} = \frac{4,2 \cdot 4,2}{14} = \frac{42 \cdot 42}{14 \cdot 100} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 42}{14 \cdot 100} = \frac{3 \cdot 42}{100} = \frac{126}{100} = 1,26$$

**Ответ:** 2.

**A6.** Формулировка в этой задаче немного запутана. Если проще сформулировать условие задачи, то нас просят найти расстояние между точками А и В. Расстояние между точками на координатной плоскости находим по формуле (вспоминаем теорему Пифагора)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

**Ответ:** 1.

**A7.** Не думаю о том, что такое стандартный вид числа, найдем значение  $a^2$ . Получим

$$(6,3 \cdot 10^1)^2 = 6,3^2 \cdot 10^2 = 39,69 \cdot 10^2$$

А теперь вспомним определение стандартного вида числа. Считается, что число записано в стандартном виде, если перед запятой стоит только одно число и это число не ноль. В нашем случае число должно быть записано в виде  $3,969 \cdot 10^x$ . Окончательно получаем

$$39,69 \cdot 10^2 = 3,969 \cdot 10 \cdot 10^2 = 3,969 \cdot 10^3$$

**Ответ:** 1.

**A8.** Прежде чем начать выражать  $k$ , желательно внимательно посмотреть на все выражение целиком и увидеть, что мы можем сократить знаменатели на 9. И только после сокращения перемножим выражения крест–накрест. Получим

$$\frac{2}{1 \cdot 9} = \frac{p-k}{2 \cdot 9} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{p-k}{2} \Rightarrow 2 \cdot 2 = 1 \cdot (p-k) \Rightarrow 4 = p-k \Rightarrow k = p-4$$

**Ответ: 4.**

**A9.** В задачах по геометрии самую главную роль играет рисунок. Поэтому не стесняйтесь даже в самых простых задачах делать большой и подробный рисунок. Правильный рисунок это 50% успеха при решении задачи по геометрии. В этой задаче сделайте рисунок САМОСТОЯТЕЛЬНО (тем более, что рисунок есть в условии)!!!

По свойству касательной отрезок ОВ (который равен радиусу окружности) перпендикулярен касательной АВ. А там где есть прямоугольный треугольник мы, как обычно, применяем теорему Пифагора.

$$OB^2 + AB^2 = AO^2 \Rightarrow 2^2 + (\sqrt{21})^2 = AO^2 \Rightarrow AO = 5$$

А теперь вспомним про теорему о касательной и секущей (кто не вспомнил – откройте любой справочник по геометрии или Википедию)

$$AB^2 = AC \cdot (AO - r) \Rightarrow AC = \frac{AB^2}{AO - r} = \frac{21}{5 - 2} = 7$$

**Ответ: 2.**

**A10.** Чтобы понять что от нас хотят, рисуем на листочке оси координат и проводим прямую, которая обязательно пересекает как ось ОХ так и ось ОУ. Смотрим внимательно на рисунок и анализируем. Когда прямая пересекает ось ОХ координата ОУ равна нулю. Следовательно,

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{8}{15}x - 8 \Rightarrow x = -15 \Rightarrow A(-15; 0)$$

А при пересечении оси ОУ координата ОХ равна нулю. Следовательно,

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{8}{15} \cdot 0 - 8 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow B(0; -8)$$

Расстояние между точками на плоскости мы уже искали в задаче А6

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

**Ответ: 4.**

**A11.** Рассмотрим каждое из неравенств отдельно.

1.  $8^{15} > 8^{16}$  – не верно.

2.  $8^{-15} < 8^{-16} \Rightarrow \frac{1}{8^{15}} < \frac{1}{8^{16}} \Rightarrow 8^{16} < 8^{15}$  – не верно.

3.  $(-8)^{15} < (-8)^{16} \Rightarrow -8^{15} < 8^{16}$  – не верно (четная степень всегда меняет знак выражения на положительный; нечетная степень никогда не меняет знак выражения).

4. При домножении левой и правой части неравенства на  $-1$  мы обязаны поменять знак неравенства на противоположный. Получим  $8^{15} > 8^{16}$  – не верно (получили случай 1).

5. Значит верно именно это неравенство.

**Ответ: 5.**

**A12.** Есть задачи в математике, которые решаются по принципу «что читаю, то и пишу». Эта задача как раз такой случай. Пусть одно число равно  $x$  (большее число), а другое равно  $y$ . Тогда

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ y^2 > xy \end{cases}$$

Выражаем  $y$  из уравнения и подставляем в неравенство. Получаем

$$(x-3)^2 > x(x-3) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 > x^2 - 3x \Rightarrow x < 3$$

**Ответ: 2.**

**A13.** Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Для того, чтобы ее найти, нам надо знать корни уравнения. Да, мы можем найти дискриминант и решить уравнение, но мы этого делать не будем. Мы поступим проще. Мы сразу же найдем сумму корней по теореме Виета

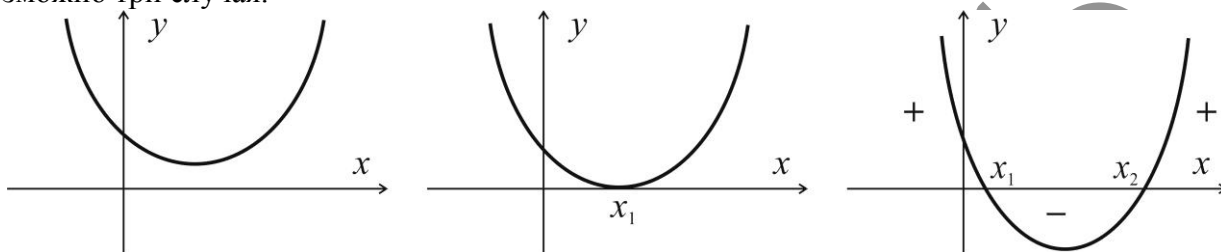
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{1} = 9$$

Важное замечание!!! Перед тем как использовать теорему Виета мы должны убедиться, что уравнение имеет решения – дискриминант уравнения должен быть положительным. Если же дискриминант равен нулю, то о сумме корней речь не идет – корень всего один. Теперь найдем среднюю линию

$$D = \frac{9}{2} = 4,5.$$

**Ответ: 3.**

**A14.** Так как коэффициент перед  $x^2$  положителен, ветви параболы направлены вертикально вверх. При этом возможно три случая.



**График 1.**

Дискриминант отрицателен. График функции никогда не пересечет ось ОХ. Значение такой функции будет всегда положительным.

**График 2.**

Дискриминант равен нулю. График функции пересекает ось ОХ в одной точке, которая будет являться корнем уравнения. Значение такой функции будет всегда положительным кроме этой одной точки. В этой точке функция обращается в ноль.

**График 3.**

Дискриминант больше нуля. График функции пересекает ось ОХ в двух точках, которые будут являться корнями уравнения. Значение такой функции будет всегда положительным до первого (наименьшего) корня, потом будет отрицательным до второго корня, после которого опять станет положительным. В точках  $x_1$  и  $x_2$  функция обращается в ноль.

В нашем случае мы имеем дело с вариантом 1, так как по условию задачи парабола не пересекает ось абсцисс (ось ОХ). Абсцисса вершины будет равна

$$x_A = \frac{-b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2.$$

Значит, ордината вершины будет равна

$$y_A = x_A^2 - 4x_A + c = 4 - 8 + c = -4 + c$$

Расстояние между вершиной и осью абсцисс равно (не забываем, что ордината вершины положительна)

$$AB = 3 = -4 + c \Rightarrow c = 7$$

То есть уравнение параболы имеет вид

$$y = x^2 - 4x + 7$$

Не поленимся и проверим наше решение. Дискриминант этого квадратного трехчлена отрицателен. Следовательно, парабола не пересекает ось ОХ и ее ветви смотрят вверх (коэффициент перед  $x^2$  положителен). Координата вершины по оси ОХ равна 2. Подставив это значение в функцию найдем значение координаты вершин по оси ОУ

$$y = x^2 - 4x + 7 = (2)^2 - 4 \cdot 2 + 7 = 3$$

Значит, расстояние до оси ОХ будет равно 3. Задача решена правильно.

**Ответ: 1.**

**A15.** Простая текстовая задача. При ее решении будем отталкиваться от того факта, что и в первом и во втором магазине Петя потратит одинаковое количество денег

$$D_1 = D_2$$

В первом магазине сумма потраченных Петей денег равна

$$D_1 = k \cdot x,$$

где  $k$  – стоимость одной ручки,  $x$  – количество купленных ручек.

Во втором магазине стоимость ручки в  $5/4$  раз меньше и Петя смог бы купить  $(x + 3)$ . Следовательно,

$$D_2 = \frac{k}{5/4} \cdot (x + 3)$$

Так как потраченные суммы будут одинаковы, то

$$D_1 = D_2 \Rightarrow k \cdot x = \frac{k}{5/4} \cdot (x + 3) \Rightarrow x \cdot \frac{5}{4} = (x + 3) \Rightarrow 5x = 4x + 12 \Rightarrow x = 12$$

**Ответ: 3.**

**A16.** При решении данной задачи важно понять, что меньшее число (33) мы берем за 100 %. При этом большее число (A) будет составлять X %. Составляем пропорцию

$$\frac{33 - 100\%}{A - x\%} \Rightarrow x = \frac{A \cdot 100}{33} \%$$

Мы нашли сколько процентов составляет число A от числа 33. А теперь найдем разность между числами в процентах. Для этого вычтем из  $x$  сто процентов. Получим

$$x - 100\% = \frac{A \cdot 100}{33} \% - 100\% = 100\% \left( \frac{A}{33} - 1 \right) = 100\% \left( \frac{A - 33}{33} \right)$$

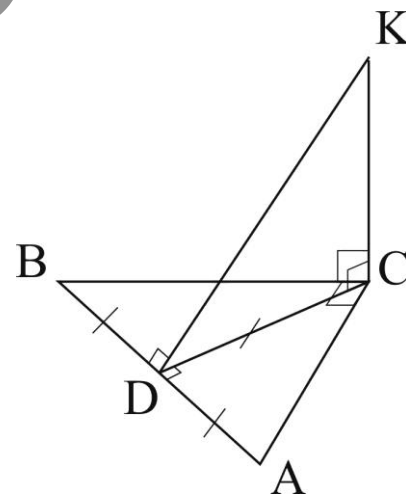
**Ответ: 5.**

**A17.** Внимательно смотрим на рисунок. Опустим высоту CD. Так как треугольник прямоугольный и равнобедренный, то высота CD будет и медианой и биссектрисой и ее длина будет равна половине гипотенузы. Так как высота CD перпендикулярна AB, то по теореме о трех перпендикулярах, и отрезок KD будет перпендикулярен AB и будет являться расстоянием от точки K до гипотенузы AB.

Применим к треугольнику CKD теорему Пифагора

$$KD^2 = KC^2 + CD^2 \Rightarrow KD = \sqrt{\left(\sqrt{65}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 9$$

**Ответ: 1.**



**A18.** Для решения этого задания нам понадобится метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории. Не игнорируйте его!

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.

Поняли что-нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

**ПРИМЕР.** Решите неравенство  $(6-x)(x+3) \leq 0$

 При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида  $(x \pm a)$ , а не  $(a \pm x)$  и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже.

У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем  $-1$  из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3) \leq 0$$

Сокращая на  $-1$  не забываем поменять знак неравенства на противоположный

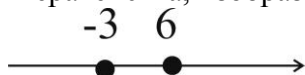
$$(x-6)(x+3) \geq 0$$

Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступать

к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

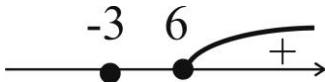
$$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ и } x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.

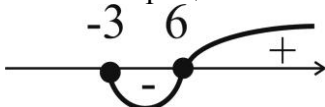


**Если все множители неравенства записаны в виде  $(x \pm a)$  и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!!**

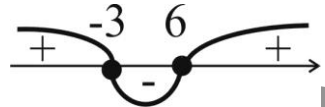
Не верите? Можем проверить. Пусть  $x=7$ , тогда  $(x-6)(x+3) = (7-6)(7+3) = 1 \cdot 10 = 10 > 0 \Rightarrow$  выражение положительно



А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства уникален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный



В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства  $\geq$ , то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка:  $(-\infty; -3]$  и  $[6; +\infty)$ .

И еще один пример.

**ПРИМЕР:** Найдите наибольшее целое решение неравенства  $(x-2)(x^2+x-6) < 0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

Перепишем неравенство в новом виде

$$(x-2)(x-2)(x+3) < 0 \Rightarrow (x-2)^2(x+3) < 0$$

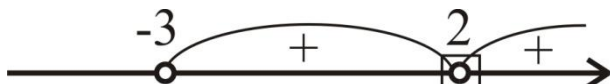
При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.



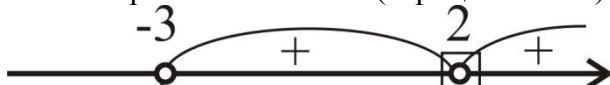
Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно



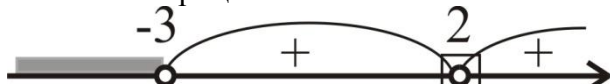
При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение  $(x-2)$  возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!



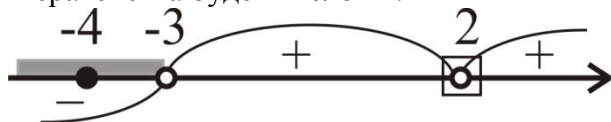
В точке -3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой



Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до  $-3$  (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число  $-4$ .



**Ответ:**  $-4$ .

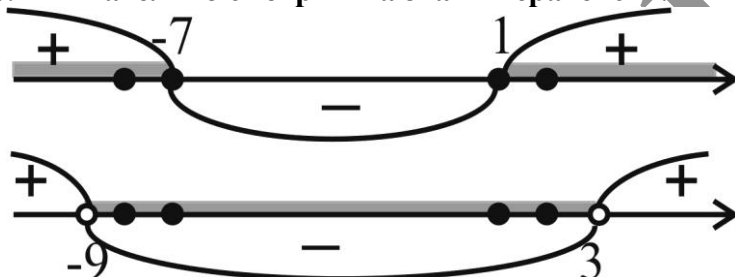
А теперь вернемся к условию нашей задачи. Мы имеем дело с системой неравенств. Таким образом, мы должны решить каждое неравенство отдельно и записать в ответ только их **ОБЩИЕ** решения. Первое неравенство раскладываем через корни квадратного уравнения (подробнее можете почитать в главе 1 «Уравнения», которая находится в свободном доступе на моем сайте). Во втором неравенстве надо вынести « $-1$ » из второй скобки. Получим

$$\begin{cases} x^2 + 6x - 7 \geq 0 \\ (x+9)(3-x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+7)(x-1) \geq 0 \\ -(x+9)(x-3) > 0 \end{cases}$$

Второе неравенство домножаем на  $-1$  и меняем знак неравенства

$$\begin{cases} (x+7)(x-1) \geq 0 \\ (x+9)(x-3) < 0 \end{cases}$$

**Рисунок ОБЯЗАТЕЛЕН!!! Внимательно смотрим на знаки неравенств!**



Так как мы имеем дело с системой неравенств, то нас интересуют только общие решения!!! Общими будут целые решения  $-8, -7, 1$  и  $2$ . Их сумма равна  $-12$ .

**Ответ:**  $1$ .

## Часть В

**В1.** Можно долго думать над этим примером, а можно просто решить в лоб. Применить формулу сокращенного умножения разность квадратов мы не можем. Поэтому просто откроем скобки внутри скобок. Получим

$$\begin{aligned} & \left( (\sqrt{2} - \sqrt{8})^2 + 6 \right) \left( (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 - 6 \right) = \left( (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{8} + 6 \right) \left( (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{8} - 6 \right) = \\ & = (\sqrt{2} + \sqrt{8} - 2\sqrt{16} + 6) (\sqrt{2} + \sqrt{8} + 2\sqrt{16} - 6) = (\sqrt{2} + \sqrt{8} - 2 \cdot 2 + 6) (\sqrt{2} + \sqrt{8} + 2 \cdot 2 - 6) = \\ & = (\sqrt{2} + \sqrt{8} + 2) (\sqrt{2} + \sqrt{8} - 2) \end{aligned}$$

А вот теперь мы получили разность квадратов

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2} + \sqrt{8} + 2) (\sqrt{2} + \sqrt{8} - 2) = ((\sqrt{2} + \sqrt{8}) + 2) ((\sqrt{2} + \sqrt{8}) - 2) = (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 - (2)^2 = \\ & = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{8} - 4 = 2 + 8 - 2\sqrt{16} - 4 = 6 + 2 \cdot 4 = 14 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $14$ .

**В2.** В данном уравнении приводить к общему знаменателю не имеет смысла, так как мы сразу же получим переменную в кубе и не сможем решить уравнение. Поэтому попытаемся сократить дробь. Для этого применим формулу для разложения квадратичного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ . Получим

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow D = 7^2 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 3 \Rightarrow x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$$

Если вы сомневаетесь в правильности своих действий, то просто раскройте скобки и сравните



получившееся выражение с оригиналом. И не забывайте про коэффициент  $a$  перед  $x^2$  (в нашем случае он равен 1 и поэтому мы не паримся).

Перепишем уравнение с учетом этого преобразования

$$\frac{(x-3)(x+4)}{x+4} = x^2 + 10x + 17 \Rightarrow x-3 = x^2 + 10x + 17 \Rightarrow x^2 + 9x + 20 = 0$$

$$D = 9^2 - 4 \cdot 20 = 1 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = -5$$

Сумма корней равна  $-9$ . Правильно? **НЕТ!!!**

**Запомните простое правило: если мы производим сокращение «числитель–числитель» – мы теряем корни; если мы производим сокращение «числитель–знаменатель» – мы теряем ОДЗ. То есть любое сокращение надо производить с осторожностью!!!**

Мы сокращали дробь. Следовательно, мы потеряли ОДЗ. Внимательно смотрим на оригинал дроби. Если  $x = -4$ , то в знаменателе будет 0, а на ноль делить нельзя. Значит, у нас только один корень.

**Ответ:  $-5$ .**

**В3.** В этой задаче, как и практически в любой задаче по геометрии, очень важно сделать большой и подробный рисунок. Прежде чем начать его рисовать, давайте посмотрим на углы треугольника. Два угла равны 39 и 21 градусов. Следовательно, третий угол будет равен 120 градусов. Значит, **треугольник тупоугольный и центр описанной окружности будет находиться вне треугольника!!!** А вот теперь приступаем к рисунку.

Сразу же показываем значения углов треугольника. Теперь начинается самое интересное.

Найдем угол  $BOC$ . Для этого нам надо будет вспомнить одну теорему. *Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на его дугу, если вершины центрального и вписанного углов лежат по одну сторону от хорды, стягивающей дугу.* Таким образом, угол  $BOC = 2\angle BAC = 78^\circ$ . Аналогично найдем угол  $BOA = 2\angle BCA = 42^\circ$ . Значит, угол  $AOC = \angle BOC + \angle BOA = 120^\circ$ .

Так как треугольник  $ACO$  равнобедренный ( $AO = CO = R$ ), то не составит труда найти углы при его основании

$$\angle CAO = \frac{180 - 120}{2} = 30^\circ.$$

А теперь рассмотрим треугольник  $ADO$ . Из рисунка видно, что радиус окружности будет в два раза больше отрезка  $DO$  (вспоминаем о катете прямоугольного треугольника, который лежит напротив угла в 30 градусов). Значит,  $R = 2 DO = 23$ .

**Ответ: 23.**

**В4. Цифры нельзя путать с числами.**

Цифры: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 – всего десять цифр, с помощью которых записывается любое число. При решении задач учитывайте, что не бывает цифр других, кроме этих десяти.

Двузначное число записывается как  $10x + y$ , где  $y$  – цифра единиц,  $x$  – цифра десятков.

Трехзначное число записывается как  $100x + 10y + z$ , где  $z$  – цифра единиц,  $y$  – цифра десятков,  $x$  – цифра сотен.

Вы можете встретить такую запись  $\overline{xyz}$ .

Она означает, что число записано цифрами  $x, y, z$ .

Всегда, увидев такую запись, заменяйте

$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

По условию задачи

$$\begin{cases} 10x + y = 4(x + y) \\ 10x + y = 1,5xy \end{cases}$$

Решаем систему и находим  $x = 4$  и  $y = 8$ . То есть искомое число равно 48. **Никогда не будет лишним прочитать еще раз условие задачи и проверить удовлетворяет ли наше найденное число условию задачи.**

**Ответ: 48**

**В5.** Никогда не будет лишним повторить основные правила решения неравенств (хотя не все они понадобятся при решении этого примера). **При решении сложных неравенств:**

1. Переносим все слагаемые из правой части неравенства в левую часть.
2. Приводим дроби к общему знаменателю. При этом перед приведением не забываем разложить на множители знаменатель каждой дроби (если это возможно)!!!
3. При решении неравенств старайтесь, чтобы все выражения в неравенстве были вида  $(x \pm a)$ , а не  $(a \pm x)$  и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками). Когда неравенство записано в таком виде **значение неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно и это облегчит решение!!!**
4. **НИКОГДА НЕ ДОМНОЖАЙТЕ (СОКРАЩАЙТЕ) НА ЗНАМЕНАТЕЛЬ, ЕСЛИ В НЕМ ЕСТЬ ПЕРЕМЕННАЯ!!!! ЕГО НУЖНО СОХРАНИТЬ ДО КОНЦА РЕШЕНИЯ!!!**

Смотрим на наше неравенство и делаем вывод, что нам повезло и работы будет не так уж и много. Возводить в третью степень первое слагаемое числителя мы не будем. Поработаем со вторым слагаемым числителя. Разложим квадратичный трехчлен на множители. Получим

$$x^2 - 14x + 49 = 0 \Rightarrow D = 0.$$

Вот это поворот – дискриминант равен нулю! На самом деле все просто. Если дискриминант равен нулю, то мы имеем дело с формулой сокращенного умножения – либо с квадратом суммы либо с квадратом разности. В нашем случае мы имеем дело с квадратом разности

$$x^2 - 14x + 49 = (x)^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + (7)^2 = (x - 7)^2$$

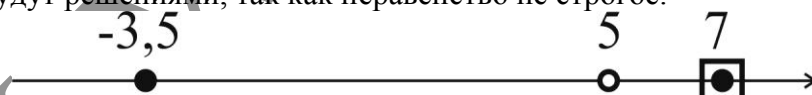
А теперь поработаем со всей дробью целиком

$$\frac{(x-7)^3 - 3x(x-7)^2}{x-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-7)^2((x-7)-3x)}{x-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-7)^2(-2x-7)}{x-5} \geq 0$$

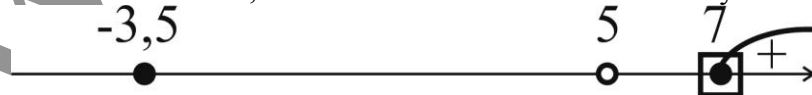
А вот теперь самое интересное. Смотрим внимательно на пункт 3. Выносим «минус» из второй скобки. **При сокращении на -1 не забываем поменять знак неравенства!!!**

$$\frac{(x-7)^2(-1)(2x+7)}{x-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-7)^2(2x+7)}{x-5} \leq 0$$

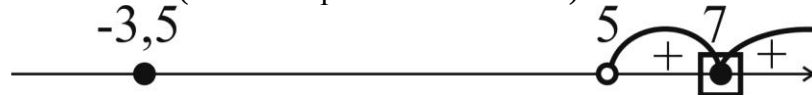
А теперь не ленимся нарисовать числовую ось. Отметим на числовой оси нули многочлена, стоящего в левой части неравенства. При этом точки знаменателя обязательно выкалываются (на ноль делить нельзя). Нули числителя будут решениями, так как неравенство не строгое.



При  $x > 7$  все множители положительны, так как все множители записаны у нас в виде  $(x \pm a)$ .



При переходе через точку  $x = 7$  многочлен не меняет знак (иногда говорят, сохраняет знак), так как  $(x - 7)$  находится в четной степени (змейка отражается от точки).

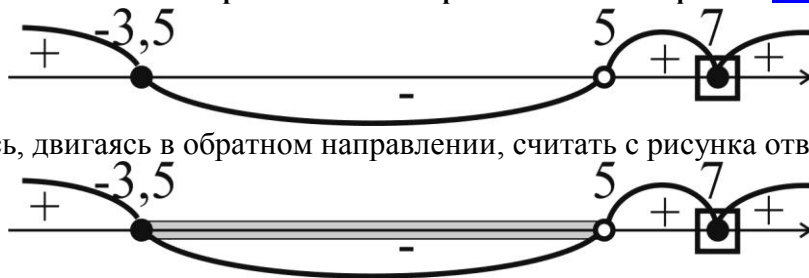


При переходе через точку  $x = 5$  знак многочлена изменится, так как  $(x - 5)$  находится в нечетной степени.



При переходе через точку  $x = -3,5$  знак многочлена не изменится, так как  $(2x + 7)$  находится в нечетной степени





Теперь только осталось, двигаясь в обратном направлении, считать с рисунка ответ.

Нас просят найти значения  $x$  при котором неравенство меньше или равно нулю. Так как неравенство нестрогое не забываем включить в решение точку  $x = 7$ . Обычно про такие точки забывают, так как слева и справа от них нет решений. **Это типичная ошибка!!!**

Целыми будут решения  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$  и  $7$ . Их сумма равна  $11$ .

**Ответ:**  $11$ .

**В6.** Достаточно простое тригонометрическое уравнение. К сожалению тем, кто совсем «плавает» в тригонометрии, мое решение не поможет разобраться с задачей. Первым же действием вынесем общий множитель за скобки. Получим

$$2\sin^2 0,3x + \sqrt{3}\sin 0,3x = 0 \Rightarrow \sin 0,3x(2\sin 0,3x + \sqrt{3}) = 0$$

Произведение двух чисел равно нулю, если одно из них равно нулю (при этом второе число должно иметь смысл). Следовательно, получаем

$$\sin 0,3x = 0 \quad \text{и} \quad 2\sin 0,3x + \sqrt{3} = 0$$

Решим первое уравнение

$$\sin 0,3x = 0 \Rightarrow 0,3x = \pi N \Rightarrow x = \frac{\pi N}{0,3} = \frac{180N}{0,3} = 600N$$

где  $N$  – целое число. По условию задачи

$$-427 \leq x \leq -375 \Rightarrow -427 \leq 600N \leq -375 \Rightarrow -\frac{427}{600} \leq N \leq -\frac{375}{600}$$

В этом случае  $N$  не может быть целым. Следовательно, решений, удовлетворяющих заданному в задаче интервалу, для данного случая не будет.

Рассмотрим второе уравнение.

$$2\sin 0,3x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin 0,3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0,3x = -60 + 2\pi N \\ 0,3x = -120 + 2\pi N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-60}{0,3} + \frac{360N}{0,3} \\ x = \frac{-120}{0,3} + \frac{360N}{0,3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -200 + 1200N \\ x = -400 + 1200N \end{cases}$$

Сначала проверим первое решение.

$$\begin{aligned} -427 \leq x \leq -375 &\Rightarrow -427 \leq -200 + 1200N \leq -375 \Rightarrow \\ -427 + 200 &\leq 1200N \leq 200 - 375 \Rightarrow \\ -227 &\leq 1200N \leq -175 \Rightarrow -\frac{227}{1200} \leq N \leq -\frac{175}{1200} \end{aligned}$$

И опять  $N$  не может быть целым. Следовательно, решений, удовлетворяющих заданному в задаче интервалу, и для данного случая не будет. Осталось проверить последнее решение

$$\begin{aligned} -427 \leq x \leq -375 &\Rightarrow -427 \leq -400 + 1200N \leq -375 \Rightarrow \\ -427 + 400 &\leq 1200N \leq 400 - 375 \Rightarrow \\ -27 &\leq 1200N \leq 25 \Rightarrow -\frac{27}{1200} \leq N \leq \frac{25}{1200} \end{aligned}$$

И вот оно наше решение!!! При  $N = 0$  получаем

$$x = -400 + 1200N = -400.$$

**И не забываем написать в бланке ответа знак МИНУС!!!**

**Ответ:**  $-400$ .

**В7.** Простая задача. Начинаем как обычно с рисунка.

Рассмотрим треугольник AFC. По условию задачи  $\cos \alpha = 0,8$ . Значит,  $\sin \alpha = 0,6$  (используем основное тригонометрическое тождество; не помните – погуглите). По определению косинуса угла

$$\cos \alpha = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AF}{\cos \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{0,8} = 5\sqrt{3}$$

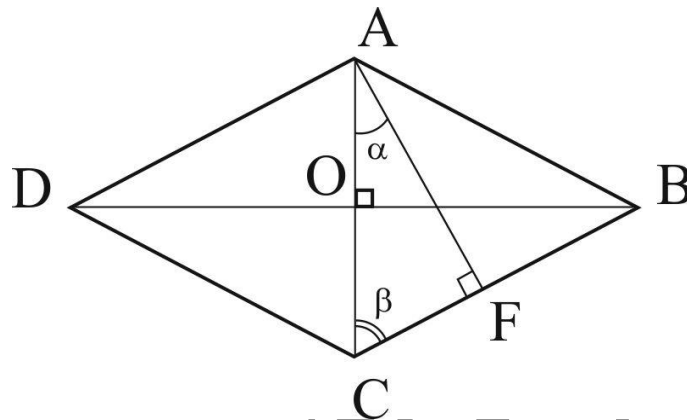
Теперь рассмотрим треугольник ВОС. Угол ОВС будет равен углу  $\alpha$  (не забываем, что треугольник ВОС так же прямоугольный). По определению синуса

$$\sin \alpha = \frac{OC}{BC} \Rightarrow BC = \frac{OC}{\sin \alpha} = \frac{AC/2}{\sin \alpha} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 0,6}$$

А теперь найдем площадь ромба (произведение высоты ромба на его сторону)

$$S = AF \cdot BC = 4\sqrt{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 0,6} = \frac{20 \cdot 3}{1,2} = 50.$$

**Ответ:** 50.



**В8.** С самого начала минимум информации про арифметическую и геометрическую прогрессии.

Пусть у нас имеется последовательность чисел  $-3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18$ .

Очевидно, что каждое последующее число больше предыдущего числа на 3 и дальше пойдут числа 21, 24, 27 и т.д.

**Арифметическая прогрессия** – числовая последовательность вида

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$$

где  $d$  – разность прогрессии. У нас она равна 3. То есть каждое последующее число больше (если прогрессия возрастающая) или меньше (если прогрессия убывающая) предыдущего на величину  $d$ .

Разность прогрессии в общем случае находится как

$$d = a_2 - a_1 \text{ или } d = a_5 - a_4 \text{ или } d = a_n - a_{n-1}$$

или

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Если  $d > 0$  – прогрессия возрастающая,  $d < 0$  – прогрессия убывающая.

Каждому члену прогрессии соответствует свой номер

$$a_1 = -3, a_2 = 0, a_3 = 3 \text{ и т.д.}$$

$n$ -й член арифметической прогрессии равен

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Например

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_7 = a_1 + (7-1)d = a_1 + 6d$$

то есть чтобы найти второй член прогрессии надо к первому добавить одну разность прогрессии, чтобы найти седьмой – надо к первому прибавить шесть разностей прогрессии.

Рассмотрим последовательность чисел  $3, -6, 12, -24, 48 \dots$

Каждый последующий член получается умножением предыдущего на одно и тоже число. Такая последовательность называется геометрической прогрессией.

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , для которой имеют место соотношения:

$$b_1 - \text{заданное число, первый член прогрессии; } b_n = b_{n-1} q - n\text{-й член прогрессии } (n \geq 2);$$

$q$  – знаменатель прогрессии ( $q \neq 1$ ).

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Если  $|q| < 1$ , то прогрессия называется бесконечно убывающей.

Формула  $n$ -го члена прогрессии

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Еще одно важное свойство. Для трех последовательных членов как арифметической так и для геометрической прогрессии, есть соотношения, которые мы и будем использовать при решении задачи. Для арифметической прогрессии

$$2a_2 = a_1 + a_3.$$

Для геометрической

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3.$$

Применим последнее соотношение к нашей задаче

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3 \Rightarrow b^2 = a \cdot c$$

Так же по условию задачи

$$a + b + c = 98 \text{ и } a = a_1, \quad b = a_3 = a_1 + 2d, \quad c = a_7 = a_1 + 6d.$$

А теперь надо собраться с мыслями и объединить все вышенаписанное.

$$b^2 = a \cdot c \Rightarrow (a_1 + 2d)^2 = (a_1)(a_1 + 6d)$$

$$a + b + c = 98 \Rightarrow a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 6d = 98.$$

Получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} (a_1 + 2d)^2 = (a_1)(a_1 + 6d) \\ a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 6d = 98 \end{cases}$$

Решая систему (это потрудитесь сделать сами, система не такая уж и сложная) получаем

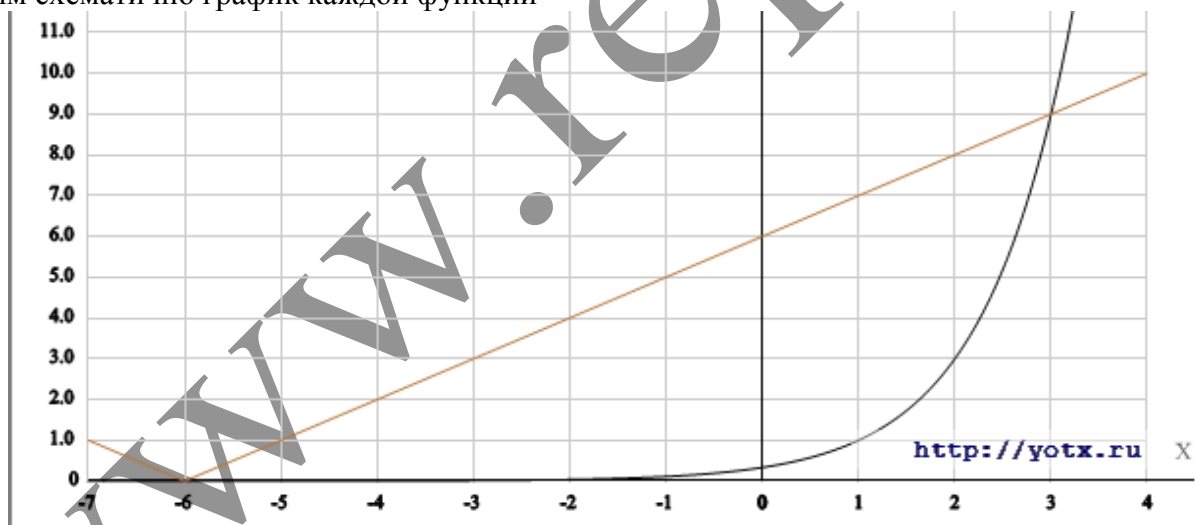
$$d = 7 \Rightarrow a_1 = 14 \Rightarrow c = a_7 = a_1 + 6d = 14 + 6 \cdot 7 = 56.$$

**Ответ:** 56.

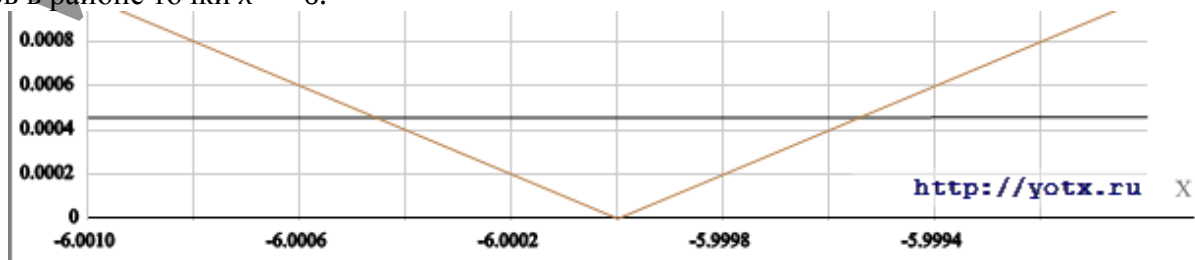
**В9.** Для решения этого задания важно знать особенности построения графика показательной функции и функции с модулем. Разобьем наше уравнение на две функции

$$y_1 = 3^{x-1} \text{ и } y_2 = |x+6|$$

Построим схематично график каждой функции



Количество точек пересечения графиков функций равно количеству корней уравнения. Один корень сразу же виден – это  $x = 3$ . Он, кстати, легко подбирается. Однако не совсем понятно сколько всего будет корней у уравнения. При таком построении ничего не видно. Поэтому немного увеличим область графиков в районе точки  $x = -6$ .



А вот теперь все понятно! На самом деле о том, что будет еще 2 точки пересечения можно было бы догадаться. Как? Показательная функция никогда не станет равной нулю. Она стремится к нулю, но не

достигает его. При этом у функции с модулем обязательно будет ноль в точке  $x = -6$ . Значит, график функции модуля пересечет график показательной функции в области точки  $x = -6$  два раза.

Следовательно, всего графики имеют три общие точки. Это и есть количество корней уравнения. Умножая больший корень уравнения 3 на количество корней 3, мы получаем 9.

**Ответ:** 9

**B10.** Сразу хочу отметить, что ученику, который «плавает» в темах неравенства и неравенства с модулем будет очень проблематично разобраться с решением этого примера.

В данном примере мы имеем дело с тремя модулями. Не спешим их раскрывать. Посмотрим внимательно на подмодульное выражение первого модуля.

$$(x^2 - 5x - 6) = (x+1)(x-6)$$

Перепишем неравенство с учетом этого преобразования

$$|(x+1)(x-6)| - 2 < 2|x+1| - |x-6|$$

Количество интервалов в этом уравнении будет равно трем. Лучше всего в таких примерах делать табличку как при решении уравнений с модулем.

|                  | $-\infty$ | $-1$ | $6$ | $+\infty$ |
|------------------|-----------|------|-----|-----------|
| $x + 1$          | $-$       | $+$  | $+$ | $+$       |
| $x - 6$          | $-$       | $-$  | $+$ | $+$       |
| $(x + 1)(x - 6)$ | $+$       | $-$  | $+$ | $+$       |

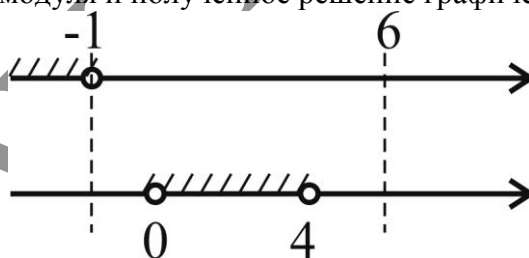
Рассмотрим первый интервал:  $x < -1$ .

**Если подмодульное выражение отрицательно, то мы обязаны поменять знак перед модулем. Если положительно – оставляем знак перед модулем. ПРИ ЭТОМ РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ДОЛЖНО УДОВЛЕТВОРЯТЬ УСЛОВИЮ РАСКРЫТИЯ МОДУЛЯ.**

Смотрим на таблицу и **меняем** (именно меняем, а не ставим знак «минус») знак перед модулями, у которых на этом интервале подмодульное выражение отрицательно. Получаем

$$(x+1)(x-6) - 2 < -2(x+1) - (-(x-6)) \Rightarrow x^2 - 5x - 6 - 2 < -2x - 2 + x - 6 \Rightarrow x^2 - 4x < 0 \Rightarrow x(x-4) < 0$$

Изображаем условие раскрытия модуля и полученное решение графически

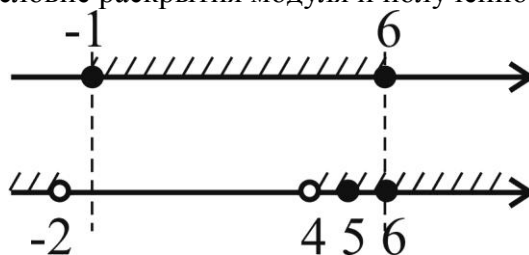


Для этого случая решений не будет.

Второй случай:  $-1 \leq x \leq 6$ . Смотрим в таблицу. Получаем

$$-(x+1)(x-6) - 2 < 2(x+1) - (-(x-6)) \Rightarrow -x^2 + 5x + 6 - 2 < 2x + 2 + x - 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-4) > 0$$

Опять изображаем графически условие раскрытия модуля и полученное решение.

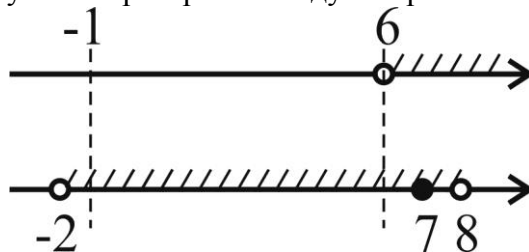


В этом случае у нас будет два решения: 5 и 6.

И последний интервал:  $x > 6$ . Смотрим в таблицу. Получаем

$$(x+1)(x-6) - 2 < 2(x+1) - (x-6) \Rightarrow x^2 - 5x - 6 - 2 < 2x + 2 - x + 6 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-8) < 0$$

И опять изображаем графически условие раскрытия модуля и решение.



В этом случае всего одно решение.

Всего мы получили 3 решения: 5, 6 и 7. Их сумма равна 18

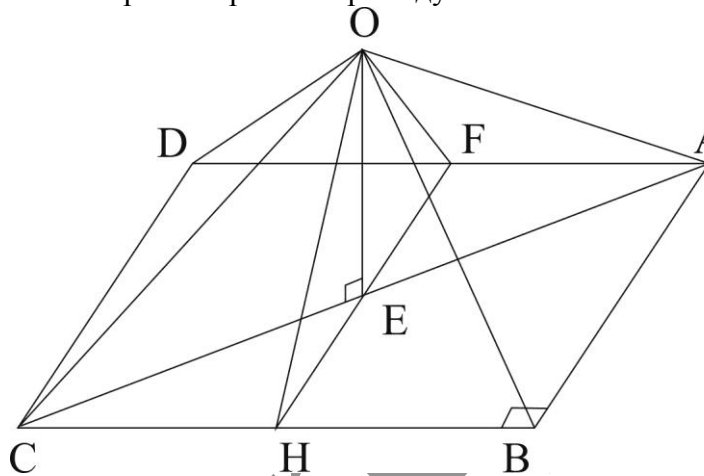
**Ответ:** 18.

**В11.** Так как значение ребра пирамиды не очень красивое число обозначим ее как  $a$ .

Сразу обращаю ваше внимание на то, что не надо изображать на рисунке 2 пирамиды и вписанный в них куб. Очевидно, что картинка будет абсолютно симметричной относительно основанию пирамид.

Поэтому нам хватит и одной пирамиды, в которую мы чуть позже впишем половинку куба.

На самом первом рисунке мы изобразим просто пирамиду.



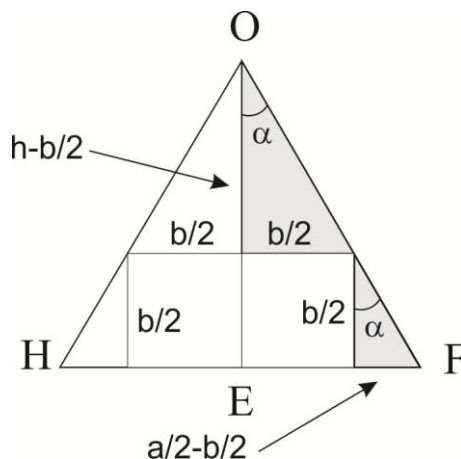
Для начала найдем высоту пирамиды OE. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник OAE. Сторона OA этого треугольника нам известна по условию. Сторона AE равна половине диагонали основания пирамиды. В основании пирамиды лежит квадрат, сторона которого нам так же известна. Значит, найти диагональ квадрата так же не составит труда. Получим

$$AE = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Следовательно, высота будет равна

$$OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

А теперь рассмотрим сечение OFH. Покажем на рисунке вписанную половину куба (сторону куба обозначим  $b$ ).



Так же покажем на рисунке значение сторон двух подобных треугольников (они отмечены серым цветом). Именно с этими треугольниками мы и будем работать.

Так как эти треугольники подобны, то приравнявая значение котангенса угла  $\alpha$  для каждого из треугольников, получим

$$\frac{h - \frac{b}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{b}{2}} \Rightarrow \frac{2h - \frac{b}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{b}{2}} \Rightarrow \frac{2h - b}{b} = \frac{b}{a - b}$$

Подставим найденное значение высоты пирамиды

$$\frac{\frac{2a}{\sqrt{2}} - b}{b} = \frac{b}{a - b}$$

Перемножаем крест-накрест и раскрываем скобки

$$(a\sqrt{2} - b)(a - b) = b^2 \Rightarrow a^2\sqrt{2} - ab\sqrt{2} - ab + b^2 = b^2 \Rightarrow a^2\sqrt{2} - ab\sqrt{2} - ab = 0 \Rightarrow$$

$$a^2\sqrt{2} = b(a\sqrt{2} + a) \Rightarrow b = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{2} + a}$$

Сократим на  $a$

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

А теперь подставляем значение ребра куба

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = b = \frac{\sqrt{2} \cdot 2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = 2\sqrt{2}$$

Следовательно, площадь грани куба будет равна

$$S = b^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8.$$

**Ответ: 8.**

**В12.** Несмотря на то, что это самая последняя задача, она не будет самой сложной.

Да, авторы теста предполагали, что вы при решении данного задания будете напрягаться и вспоминать формулу половинного угла для тангенса

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

А потом еще формулу для косинуса суммы углов

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Почему?

$$\operatorname{tg} 37^\circ 30' = \operatorname{tg} \frac{75}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 75}{1 + \cos 75}} = \sqrt{\frac{1 - \cos(30 + 45)}{1 + \cos(30 + 45)}}$$

Сложно? Сложно! Поэтому мы даже не будем думать о таких страшных формулах! Мы немного сжульничаем. Давайте оценим значение каждого слагаемого в выражении, значение которого мы должны найти. С первыми двумя слагаемыми все просто

$$\sqrt{2} \approx 1,41, \quad \sqrt{3} \approx 1,73$$

С третьим чуть сложнее. С одной стороны мы можем его посчитать как произведение двух корней

$$\sqrt{6} = \sqrt{3}\sqrt{2} \approx 1,41 \cdot 1,73$$

С другой стороны мы можем вспомнить, что 6 немного меньше числа 6,25, квадратный корень из которого легко извлекается и равен 2,5. Следовательно,

$$\sqrt{6} \approx 2,4$$

Тангенс 37,5 градусов будет немного меньше 1, так как тангенс 45 равен 1. Окончательно получаем

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} - 7 + \operatorname{tg} 37^\circ 30' = 1,41 - 1,73 - 2,4 - 7 + \operatorname{tg} 37^\circ 30' = -9,72 + \operatorname{tg} 37^\circ 30'$$

Ну а теперь догадайтесь чему будет равен тангенс 37,5 градусов, если он чуть меньше единицы и положителен! При этом мы должны помнить, что ответом в Б части может быть только целое число.

**Ответ: -9.**