

В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории.

Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.

Если у вас есть более красивые решения отдельных задач – поделитесь! ☺

2015/2016, 3 этап, первый вариант

Это черновик решений. Окончательный вариант будет чуть позже.

A1. При решении неравенств важно помнить, что при делении (умножении) правой и левой части неравенства на отрицательное число мы обязаны поменять знак на противоположный!!! Нам предлагают решить простое линейное неравенство. Разделим правую и левую часть на минус 3

$$-3x \geq 8 \Rightarrow x \leq \frac{8}{-3} \Rightarrow x \leq -\frac{8}{3}$$

Есть и второй вариант решения. Перенесем слагаемое с переменной в правую часть неравенства, а 8 в левую. Тем самым мы избавим себя от деления на отрицательное число

$$-3x \geq 8 \Rightarrow -8 \leq 3x \Rightarrow -\frac{8}{3} \leq x \Rightarrow x \leq -\frac{8}{3}$$

Ответ: 3.

A2. Сначала найдем общее количество марок

$$N = 21 \cdot 5 = 105$$

Ну а дальше все просто

$$N = N_0 \cdot 3 \Rightarrow N_0 = \frac{N}{3} = \frac{105}{3} = 35$$

Ответ: 2.

A3. Сначала раскладываем 42 на множители

$$42 = 7 \cdot 6 = 7 \cdot 3 \cdot 2$$

Потом находим их сумму

$$7 + 3 + 2 = 12.$$

Ответ: 4.

A4. Разобьем фигуру, представленную на рисунке, на две фигуры: треугольник и трапецию. Найдем площадь каждой из них. Зная координаты вершин фигур, мы легко найдем их стороны и высоты.

Треугольник. Основание: $5 - 2 = 3$, высота: $4 - 1 = 3$. Площадь

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5$$

Трапеция. Меньшее основание: $5 - 2 = 3$, большее основание: $9 - 2 = 7$, высота: $9 - 4 = 5$. Площадь

$$S_2 = \frac{7+3}{2} \cdot 5 = 25$$

Площадь всей фигуры будет равна

$$S = S_1 + S_2 = 4,5 + 25 = 29,5.$$

Ответ: 5.

A5. Немного теории. Степенью числа a с показателем n (a принадлежит рациональным числам, n – натуральным), называется произведение числа a на число a n раз: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$. Число a – основание степени, n – показатель степени. **Повторим свойства степени.**

1. Степень произведения двух или нескольких сомножителей равна произведению степеней этих со-

множителей с тем же показателем: $(abc)^n = a^n b^n c^n$ И наоборот, произведение одинаковых степе-

ней нескольких величин равно той же степени произведения этих величин: $a^n b^n c^n \dots = (abc \dots)^n$

На практике это свойство применяется, когда основание степени достаточно большое число. Например,

у нас есть число 35^6 . Согласно этому свойству $35^6 = (5 \cdot 7)^6 = 5^6 \cdot 7^6$. Ну а дальше обычно находятся чис-

ла, с которыми мы «подружим» получившихся два множителя.

2. Если у нас есть в степени дробь, то она действует как на числитель так и на знаменатель $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются: $a^m a^n = a^{m+n}$ или $a^m a^{-n} = a^{m-n}$. Например, $x^{10} x^9 = x^{10+9} = x^{19}$ или $x^{10} x^{-9} = x^{10-9} = x^1 = x$

4. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ или } \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

Примеры. $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$, $\frac{x^7}{x^{-2}} = x^{7-(-2)} = x^{7+2} = x^9$ $8x^{\frac{5}{6}} : 4x^{-\frac{2}{3}} = \frac{8x^{\frac{5}{6}}}{4x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2x^{\frac{5}{6}}}{x^{-\frac{2}{3}}} = 2x^{\frac{5}{6}-(-\frac{2}{3})} = 2x^{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{5}{6}+\frac{4}{6}} = 2x^{\frac{9}{6}} = 2x^{\frac{3}{2}}$

5. При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются: $(a^m)^n = a^{mn}$

Пусть у нас есть число 48^6 . Используем свойство 1 и свойство 5 чтобы записать его в человеческом виде

$$48^6 = (3 \cdot 16)^6 = 3^6 \cdot 16^6 = 3^6 \cdot (2^4)^6 = 3^6 \cdot 2^{4 \cdot 6} = 3^6 \cdot 2^{24}$$

6. $a^0 = 1$

7. $a^1 = a$

8. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ и наоборот $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Ну а дальше все просто. Будем делать пример по действиям

$$1) \left(1\frac{1}{8}\right)^{-8} = \left(\frac{9}{8}\right)^{-8} = \left(\frac{8}{9}\right)^8, \quad 2) (1,125)^{-6} = (1+0,125)^{-6} = \left(1+\frac{1}{8}\right)^{-6} = \left(\frac{9}{8}\right)^{-6} = \left(\frac{8}{9}\right)^6$$

Окончательно получаем

$$\left(\left(\frac{8}{9}\right)^8 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^6\right)^{0,2} = \left(\left(\frac{8}{9}\right)^{8-9+6}\right)^{0,2} = \left(\left(\frac{8}{9}\right)^5\right)^{0,2} = \left(\frac{8}{9}\right)^{5 \cdot 0,2} = \left(\frac{8}{9}\right)^1 = \frac{8}{9}$$

Ответ: 3.

A6. Смотрим внимательно на рисунок. Так как $AM = MB$ и $AN = NC$, то отрезки MN и BC параллельны.

Следовательно, $\triangle AMN$ тоже равнобедренный и $\angle MAN = \angle MNA = \frac{180^\circ - 104^\circ}{2} = 38^\circ$. Значит

$$\angle MNC = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ.$$

Ответ: 1.

A7. Пусть у нас имеется последовательность чисел $-3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18$.

Очевидно, что каждое последующее число больше предыдущего числа на 3 и дальше пойдут числа 21, 24, 27 и т.д.

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность вида

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$$

где d – разность прогрессии. У нас она равна 3. То есть каждое последующее число больше (если прогрессия возрастающая) или меньше (если прогрессия убывающая) предыдущего на величину d .

Разность прогрессии в общем случае находится как

$$d = a_2 - a_1 \text{ или } d = a_5 - a_4 \text{ или } d = a_n - a_{n-1} \text{ или } a_n = a_{n-1} + d.$$

Если $d > 0$ – прогрессия возрастающая, $d < 0$ – прогрессия убывающая.

Каждому члену прогрессии соответствует свой номер

$$a_1 = -3, a_2 = 0, a_3 = 3 \text{ и т.д.}$$

n -й член арифметической прогрессии равен

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Например, $a_2 = a_1 + d$, $a_7 = a_1 + (7-1)d = a_1 + 6d$, то есть чтобы найти второй член прогрессии надо к первому добавить одну разность прогрессии, чтобы найти седьмой – надо к первому прибавить шесть разностей прогрессии.

Решим задачу в лоб! Раскроем 15-й и 17-й члены прогрессии через первый и разницу прогрессии

$$a_{15} + a_{17} = 27 \Rightarrow a_1 + 14d + a_1 + 16d = 27 \Rightarrow 2a_1 + 30d = 27$$

А теперь раскроем 16-й через разницу прогрессии

$$a_{16} = a_1 + 15d = \frac{2(a_1 + 15d)}{2} = \frac{2a_1 + 30d}{2} = \frac{a_{15} + a_{17}}{2} = \frac{27}{2} = 13,5.$$

У этой задачи есть еще один способ решения. Если в условии задачи сказано, что числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то это означает равенство $2b = a + c$. Это равенство следует из определения разности прогрессии

$$d = b - a = c - b \Rightarrow b - a = c - b \Rightarrow 2b = a + c$$

Таким образом, при решении задач также можно пользоваться следующим свойством

$$a_n + a_m = a_p + a_k \text{ если } n + m = p + k$$

А теперь опять вернемся к условию нашей задачи. Согласно утверждению выше

$$a_{15} + a_{17} = a_{16} + a_{16} \Rightarrow a_{16} = \frac{a_{15} + a_{17}}{2}$$

Второй способ гораздо проще и короче первого. Поэтому очень рекомендую запомнить свойство, которое позволило нам так быстро решить задачу.

Ответ: 3.

A8. Внимательно смотрим на диаграмму. Вся диаграмма это 360 градусов. Количество 4 и 5-комнатных равны (так как равны углы). Следовательно,

$$360^\circ = 63^\circ + 72^\circ + 135^\circ + \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

А дальше просто находим на сколько процентов отличаются продажи 3 и 5 комнатных квартир

$$\frac{3_x - 63^\circ}{5_x - 45^\circ} \Rightarrow \frac{3_x - 5_x}{5_x} = 18\%$$

Ответ 18? Нет, это не правильный ответ. Составители тестов хотят видеть в ответе, насколько в процентах отличаются продажи. Перевожу на русский. Например, у Васи было 10 рублей. Бабушка подарила Васе 3 рубля, и у Васи стало 13 рублей. Следовательно, благосостояние Васи увеличилось на 3 рубля или на 30 %. Поэтому те, кто указал в задаче ответ 18% по мнению составителей тестов неправильно решили задачу. Поэтому делаем следующее. Количество проданных 5-комнатных квартир берем за 100%, а количество проданных 3-комнатных за x и составляем пропорцию

$$\frac{5_x - 100\%}{3_x - x\%} \Rightarrow \frac{3_x \cdot 100\%}{5_x} = \frac{63^\circ \cdot 100\%}{45^\circ} = 140\% \Rightarrow \Delta = 40\%$$

Ответ: 4.

A9. Для решения этой задачи нам понадобится НОК. **Общим кратным** нескольких чисел называется число, являющееся кратным каждого из них. Например, числа 14, 18, 7 имеют общее кратное число 252, однако число 126 тоже является общим кратным этих чисел. Среди всех общих кратных всегда есть наименьшее, которое называется **наименьшим общим кратным** (обозначается НОК). В нашем примере наименьшим общим кратным перечисленных чисел будет число 126. Кратко этот факт записывается так: $\text{НОК}(14, 18, 7) = 126$.

Если числа небольшие, то наибольшее общее кратное можно легко угадать. Если же даны большие числа, то НОК можно найти разложением чисел на простые множители и выписыванием тех множителей, которые входят хотя бы в одно из данных чисел. После этого каждый такой множитель нужно взять с наибольшим показателем, с которым он входит во все данные числа. Затем следует произвести умножение. Найдем НОК 9 и 12. Получим

$$9 = 3 \cdot 3; 12 = 3 \cdot 4 \Rightarrow \text{НОК} = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$$

Однако в задаче сказано, что деление происходит с остатком 1. Значит искомое число 27. Проверим

$$37 = 2 \cdot 13 + 11$$

Ответ: 4.

A10. Сделайте самостоятельно небольшой пояснительный рисунок. По определению тангенса

$$\text{tg } BAC = \frac{CB}{AC} \Rightarrow CB = AC \cdot \text{tg } BAC = 14\sqrt{2}$$

Ну и конечно же, записываем теорему Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{7^2 + 14^2 \cdot 2} = 7\sqrt{1+8} = 21$$

Ответ: 2.

A11. Внимательно смотрим на рисунок и записываем значения, которые принимает функция

$$A = -3 - 2 + 1 + 3 + 4 + 5 = 8$$

Ответ: 5.

A12. Для того, чтобы сократить дробь, надо попытаться разложить числитель и знаменатель дроби на множители. В числителе у нас биквадратное уравнение. Раскладываем его на множители при помощи корней

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0 \Rightarrow x^2 = t, x^4 = t^2 \Rightarrow t^2 - 11t + 30 = 0 \Rightarrow D = 121 - 120 = 1 \Rightarrow t = \frac{11 \pm 1}{2} \begin{matrix} t_1 = 5 \\ t_2 = 6 \end{matrix}$$

Следовательно,

$$t^2 - 11t + 30 = (t - 5)(t - 6) = (x^2 - 5)(x^2 - 6)$$

В знаменателе у нас разность квадратов

$$x^4 - 25 = (x^2)^2 - 5^2 = (x^2 - 5)(x^2 + 5)$$

Окончательно получаем

$$\frac{(x^2 - 5)(x^2 - 6)}{(x^2 - 5)(x^2 + 5)} = \frac{x^2 - 6}{x^2 + 5}$$

Ответ: 1.

A13. Формулы приведения нам в помощь.

$$\frac{(\cos(6\pi - \alpha) - \sin(3,5\pi - \alpha))^2}{\cos^2(4,5\pi - \alpha)} = \frac{(\cos(-\alpha) - \sin(1,5\pi - \alpha))^2}{\cos^2(0,5\pi - \alpha)} = \frac{(\cos \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{4\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 4\operatorname{ctg}^2 \alpha$$

Ответ: 5.

A14. Время движения велосипедиста равно $v_{\text{вело}} = \frac{60}{a}$, мотоциклиста $v_{\text{мото}} = \frac{60}{b}$. Промежуток времени, через который они встретятся, равен

$$t = \frac{\ell}{v_{\text{вело}} + v_{\text{мото}}} = \frac{60}{\frac{60}{a} + \frac{60}{b}} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow t = \frac{ab}{a+b}$$

Ответ: 1.

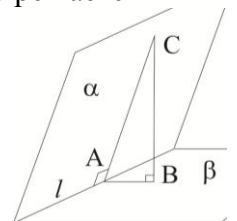
A15. В этой задаче главное сделать правильный рисунок. С рисунком задача очень легко решается

$$AC^2 = CB^2 + AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - CB^2} = \sqrt{7}$$

По определению косинуса

$$\cos CAB = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ответ: 4.



A16. При решении иррациональных уравнений важно помнить, что могут получиться посторонние корни, которые легко определить по ОДЗ. Первым действием запишем ОДЗ. Так как подкоренные выражения должны быть неотрицательны, то

$$\begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3. \text{ Потом перенесем слагаемое } \sqrt{x-3} \text{ в правую часть уравнения, чтобы избавиться себя от лишних перегруппировок в будущем. Возводим правую и левую часть уравнения во вторую степень. Получаем}$$

$$\sqrt{3x-5} = \sqrt{x-3} + 2 \Rightarrow (\sqrt{3x-5})^2 = (\sqrt{x-3} + 2)^2 \Rightarrow 3x-5 = x-3+2\sqrt{x-3} \cdot 2+4 \Rightarrow 2x-6 = 4\sqrt{x-3}$$

Обязательно сокращаем каждое слагаемое на 2. Так же не забываем записать ОДЗ. Так как значение квадратного корня должно быть не отрицательно, то $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ (ОДЗ повторилось, но так бывает очень редко). Опять возводим во вторую степень

$$(x-3)^2 = (2\sqrt{x-3})^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4(x-3) \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 7$$

Оба корня подходят. Это тоже бывает крайне редко. Обычно один из корней будет посторонним.

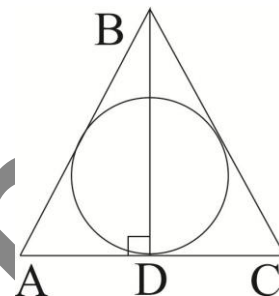
Ответ: 3.

A17. Обязательно делаем рисунок!!! Но не просто вписываем сферу в конус, а строим только сечение конуса и сферы. То есть мы рассматриваем задачу о вписанной в треугольник окружности. По условию задачи $AD = 5$; $AB = \sqrt{11}$. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{25 + 11} = 6$$

По определению радиус вписанной окружности равен

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} 2AD \cdot BD}{(2AB + 2AD)} = \frac{AD \cdot BD}{AB + AD} = \frac{5 \cdot \sqrt{11}}{6 + 5} = \frac{5 \cdot \sqrt{11}}{11}$$



А теперь вспомним, что у нас не окружность, а сфера и найдем площадь ее поверхности

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \frac{25 \cdot 11}{11^2} = \frac{4\pi \cdot 25}{11} = \frac{100\pi}{11}$$

Информация для продвинутых. Радиус вписанной окружности так же можно найти через подобие треугольников. Предлагаю вам сделать это самостоятельно (подсказка – из центра окружности надо опустить перпендикуляр на сторону AB или BC).

Ответ: 2.

A18. Немного преобразуем каждую из функций

1) $-2y = 6 \Rightarrow y = -3$ – прямая горизонтальная линия (5 точек пересечения).

2) $3x = 12 \Rightarrow x = 4$ – прямая вертикальная линия (1 точка пересечения).

3) $y = -\frac{2}{x}$ – обратно пропорциональная зависимость (3 точки пересечения).

4) $y = 5 - x^2$ – парабола (2 точки пересечения).

5) $x^2 + y^2 = (3)^2$ – окружность радиуса 3 с центром в начале координат (4 точки пересечения).

Примерно строим график каждой из функций и считаем количество точек пересечения. Более простого способа решения я не нашел.

Ответ: 5.

Часть В

B1. Пусть x – масса лимона, y – апельсина. По условию задачи (массу подставляем в граммах)

$$\begin{cases} 3x + y = 20 + 2x + 2y \\ 5x + 3y = 780 \end{cases}$$

Решаем систему

$$\begin{cases} x = 20 + y \\ 5x + 3y = 780 \end{cases} \Rightarrow 5(20 + y) + 3y = 780 \Rightarrow 8y = 680 \Rightarrow y = 85$$

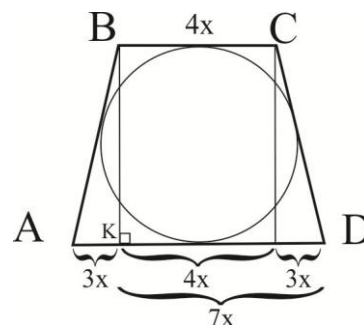
Значит, масса лимона равна $x = 20 + y = 20 + 85 = 105$

Ответ: 105.

B2. Пусть $AK = 3x$, $KO = 7x$ (см. рисунок).

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны. Следовательно, $BC + AD = AB + CD$. Так как трапеция равнобокая, то $AB = CD$ и $BC = 4x$ (внимательно посмотрите на рисунок). Получаем

$$4x + 10x = 2AB \Rightarrow AB = 7x.$$



По теореме Пифагора для треугольника АВК

$$AB^2 = AK^2 + BK^2 \Rightarrow 49x^2 = 9x^2 + 4^2 \cdot 10 \Rightarrow 40x^2 = 4^2 \cdot 10 \Rightarrow x^2 = \frac{4^2}{4} = 4 \Rightarrow x = 2$$

Теперь мы знаем все стороны трапеции $BC = 8$; $AD = 20$; $AB = CD = 14$. Периметр трапеции равен $8 + 20 + 2 \cdot 14 = 56$.

Ответ: 56.

В3. Несмотря на то, что задача простая и можно сказать жизненная, она все же немного выносит мозг ☺ Вера будет ездить на транспорте 15 рабочих дней (выходные не считаем). Каждый день будет 2 поездки на троллейбусе и 2 на метро.

Вариант 1. Проездной билет на определенное количество поездок.

За 15 дней Вере предстоит сделать 30 поездок на метро и 30 поездок на троллейбусе. Значит она покупает проездной на 30 поездок на каждый транспорт. Итого она тратит $136.500 + 150.000 = 286.700$.

Экономия составит 13.300.

Вариант 2. Проездной на полмесяца и на определенное количество поездок.

Вера покупает проездной билет на полмесяца (это 10 рабочих дней) на троллейбус–метро, проездной 10 поездок на метро (5 дней по 2 поездки) + 10 поездок на троллейбусе (5 дней по 2 поездки). Итого она тратит

$$166\ 100 + 47\ 500 + 52\ 300 = 265.900.$$

Экономия составит 34.100.

Вариант 3. Декада это 10 дней (из них рабочих только 8). Следовательно, остается 7 дней, за которые будет 14 поездок на метро и 14 на троллейбусе. Следовательно, покупаем билеты на 10 поездок и 4 талона.

Проездной на декаду		111.100
Метро	10 поездок	47.500
	4 талона	4×5.500
Троллейбус	10 поездок	52.300
	4 талона	4×5.000

Итого Вера потратит 252.900, экономия 47.100.

Ответ: 47100.

В4. Для решения этого задания нам понадобится метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории. Не игнорируйте его!

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.

Поняли что–нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

ПРИМЕР. Решите неравенство $(6-x)(x+3) \leq 0$

При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида $(x \pm a)$, а не $(a \pm x)$ и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже.

У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем -1 из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3) \leq 0$$

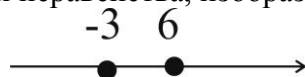
Сокращая на -1 не забываем поменять знак неравенства на противоположный

$$(x-6)(x+3) \geq 0$$

Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступить к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

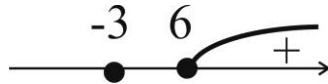
$$x-6=0 \Rightarrow x=6 \text{ и } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.

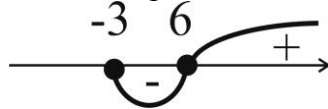


Если все множители неравенства записаны в виде $(x \pm a)$ и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!!

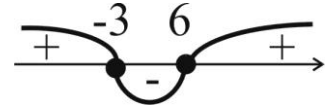
Не верите? Можем проверить. Пусть $x=7$, тогда $(x-6)(x+3) = (7-6)(7+3)=1 \cdot 10=10 > 0 \Rightarrow$ выражение положительно



А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства уникален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный



В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства $\geq$, то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка: $(-\infty; -3]$ и $[6; +\infty)$.

И еще один пример.

ПРИМЕР: Найдите наибольшее целое решение неравенства $(x-2)(x^2+x-6) < 0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

Перепишем неравенство в новом виде

$$(x-2)(x-2)(x+3) < 0 \Rightarrow (x-2)^2(x+3) < 0$$

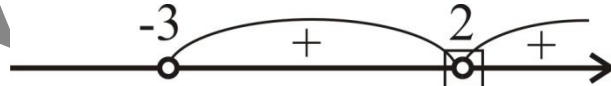
При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.



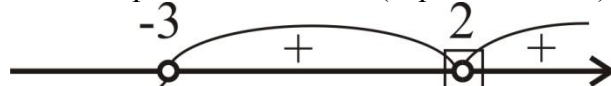
Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно



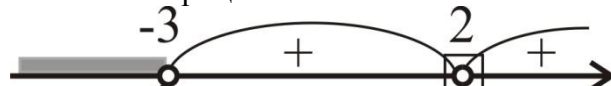
При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение $(x-2)$ возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!



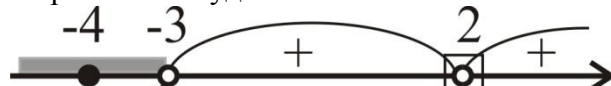
В точке -3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой



Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до -3 (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число -4.



Ответ: -4.

Метод интервалов для рациональных функций можно сформулировать в следующем виде.

1. Привести неравенство к стандартному виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (слева была дробь, справа ноль).
2. Разложить на множители многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (как мы знаем, для этого придётся решить уравнения $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$). Другими словами надо сделать так, чтобы в числителе и знаменателе дроби были только произведения скобок вида $(x \pm a)$, где a – число. В некотором плане это подобно методы решения уравнений, который мы прошли в первой главе.
3. Нули числителя, не совпадающие с нулями знаменателя, отметить на числовой оси **точками** (если неравенство нестрогое; если строгое – кружочками), а нули знаменателя – **кружочками** (на ноль делить нельзя).

ЕЩЕ РАЗ НАПОМНЮ, ЧТО ЕСЛИ ВСЕ МНОЖИТЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНЫ В ВИДЕ $(x \pm a)$ И НЕТ МИНУСОВ ПЕРЕД СКОБКАМИ, ТО ЗНАЧЕНИЕ ТАКОЙ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ БУДЕТ ВСЕГДА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ!!

Провести кривую знаков, проходя через все точки, отмеченные на числовой прямой, меняя или не меняя знак в зависимости от степени двучлена, отвечающего данной точке.

4. Записать ответ, обращая особое внимание на граничные точки, часть из которых может быть «выколота».

А теперь вернемся к нашему неравенству. Сразу же бросаем внимание на то, что работы нам не предстоит не так уж и много. Во первых, «выплываем» минус из последней скобки и сокращаем на минус

1. При этом не забываем поменять знак неравенства

$$-(x+2)(x^2-3x-10)(x^2-7x+13) < 0 \Rightarrow (x+2)(x^2-3x-10)(x^2-7x+13) > 0$$

Далее при помощи корней раскладываем на множители вторую и третью скобку

$$x^2-3x-10=0 \Rightarrow x_1=5 \quad x_2=-2 \Rightarrow x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$$

Так как дискриминант уравнения $x^2-7x+13=0$ отрицательный, то оно всегда принимает положительные значения (коэффициент перед x^2 положителен) и мы это выражение можем опустить. Получим

$$(x+2)(x^2-3x-10)(x^2-7x+13) > 0 \Rightarrow (x+2)(x-5)(x+2) > 0 \Rightarrow (x-5)(x+2)^2 > 0$$

Так как $(x+2)^2$ всегда больше нуля и $x=-2$ не будет являться решением неравенства (неравенство у нас строгое), то неравенство можно переписать в виде

$$(x-5)(x+2)^2 > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Rightarrow x > 5$$

Наименьшее целое решение равенства будет равно 6. **Ответ: 6.**

В5. Я надеюсь для всех очевидно, что мы даже не будем пытаться подставлять данные в исходное выражение. Для начала мы должны преобразовать его. Сначала поработаем над первой скобкой

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x + y + 2\sqrt{xy} - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Потом над второй

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} - \frac{4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x + y - 2\sqrt{xy} + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Окончательно получим

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{((\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}))^2}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{(x - y)^2}{x - y} = x - y = -9$$

Ответ: -9.

В6. При решении логарифмических неравенств мы должны помнить, что **если основание логарифма меньше 1, то знак неравенства будет меняться.** Немного преобразуем первый логарифм

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} (3x-18)^2 \geq \log_{\frac{1}{2}} (2x-10)$$

Казалось бы, что сейчас мы можем легко выплюнуть степени и все будет хорошо. Однако это не так. Степень основания логарифма выплевывается без проблем, так как в основании число. А с четной степенью подлогарифмического выражения надо быть всегда аккуратным. Важно помнить одно очень важное свойство: $\log_a b^2 = 2\log_a |b|$. Иначе Вы потеряете корни!!! Так надо действовать в случае любой ЧЕТНОЙ степени!!! Поэтому получаем

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} (3x-18)^2 \geq \log_{\frac{1}{2}} (2x-10) \Rightarrow \frac{2}{2} \log_{\frac{1}{2}} |3x-18| \geq \log_{\frac{1}{2}} (2x-10) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} |3x-18| \geq \log_{\frac{1}{2}} (2x-10)$$

На самом деле именно в этом примере модуль не имеет смысла. Почему? Смотрим на подлогарифмическое выражение второго логарифма. Согласно определению логарифма, $(2x-10) > 0 \Rightarrow x > 5$. В первом логарифме подлогарифмическое обнуляется при $x = 6$. Следовательно, целые решения (если они будут) начнутся только с $x = 7$. Поэтому смело убираем модуль и переходим от логарифмического неравенства к обыкновенному. И не забываем поменять знак неравенства!!!

$$\log_{\frac{1}{2}} |3x-18| \geq \log_{\frac{1}{2}} (2x-10) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (3x-18) \geq \log_{\frac{1}{2}} (2x-10) \Rightarrow 3x-18 \leq 2x-10 \Rightarrow 6 < x \leq 8$$

Целыми решениями будут 7 и 8.

Ответ: 15.

B7. При решении таких уравнений надо верить, что все будет хорошо ☺

$$9^x + 24 \cdot 3^{\frac{x-3}{2}} = 3^{1-x} \Rightarrow 3^{2x} + 24 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{-1.5} = \frac{3^1}{3^x} \Rightarrow 3^{2x} \cdot 3^x + \frac{24 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x}{3^{1.5}} = 3 \Rightarrow 3^{3x} + \frac{24}{3^{1.5}} \cdot 3^{1.5x} - 3 = 0$$

А теперь делаем замену и не боимся вычислить дискриминант

$$t^2 + \frac{24}{3^{1.5}} t - 3 = 0 \Rightarrow D = \frac{24^2}{(3^{1.5})^2} - 4(-3) = \frac{576}{3^3} + 12 = \frac{576 + 12 \cdot 27}{3^3} = \frac{900}{3^3} = \left(\frac{30}{3^{1.5}}\right)^2$$

Нас будет интересовать только положительный корень

$$t = \frac{-\frac{24}{3^{1.5}} + \frac{30}{3^{1.5}}}{2} = \frac{6}{2 \cdot 3^{1.5}} = \frac{6}{2 \cdot 3^{1.5}} = \frac{3}{3^{1.5}} = 3^{-0.5} \Rightarrow t = 3^{-0.5} = 3^{1.5x} \Rightarrow -0.5 = 1.5x \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Не забываем, что ответ надо умножить на 30.

Ответ: -10.

B8. Простое тригонометрическое уравнение. Для начала вспомним основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Подставим это в уравнение

$$4\sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 4(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 4 - 4\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Замена очевидна $\cos x = t$. Получаем простое квадратное уравнение

$$-4t^2 - t + 3 = 0 \Rightarrow 4t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 49 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 7}{2 \cdot 4} \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}$$

По условию задачи

$$-\frac{4\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -240^\circ \leq \alpha \leq 450^\circ$$

Рассмотрим первое решение

$$\cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi + 2\pi N = 180^\circ + 360^\circ N$$

Найдем количество решений

$$-240^\circ \leq 180^\circ + 360^\circ N \leq 450^\circ \Rightarrow -240^\circ - 180^\circ \leq 360^\circ N \leq 450^\circ - 180^\circ \Rightarrow -420^\circ \leq 360^\circ N \leq 270^\circ$$

$$\frac{-420^\circ}{360^\circ} \leq N \leq \frac{270^\circ}{360^\circ} \Rightarrow -1.16 \leq N \leq 0.75 \Rightarrow N = -1; 0 - 2 \text{ корня}$$

Теперь второе решение. Тут важно оценить значение угла, так как косинус 0,75 не является табличной величиной

$$\cos \alpha = +0,75 \Rightarrow \alpha \approx \pm 40^\circ + 360^\circ N$$

Сначала рассмотрим для угла 40° градусов

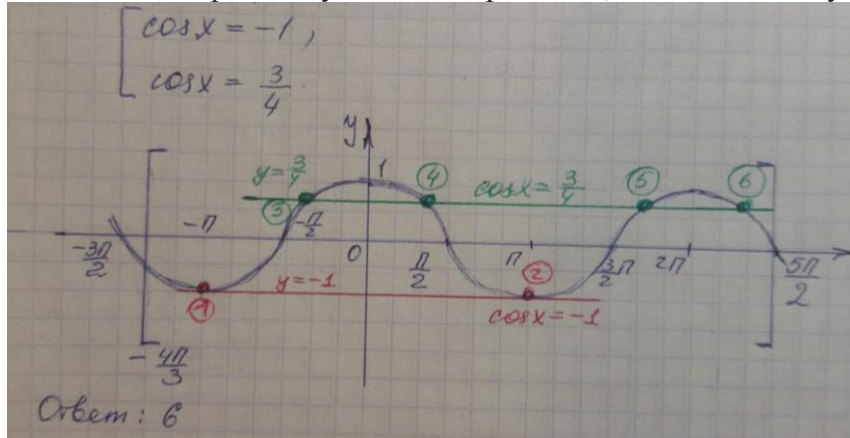
$$-240^\circ \leq +40^\circ + 360^\circ N \leq 450^\circ \Rightarrow \frac{-240^\circ - 40^\circ}{360^\circ} \leq N \leq \frac{450^\circ - 40^\circ}{360^\circ} \Rightarrow -0,7 \leq N \leq 1,13 \Rightarrow N = 0; 1$$

Теперь для угла минус 40° градусов

$$-240^\circ \leq -40^\circ + 360^\circ N \leq 450^\circ \Rightarrow \frac{-240^\circ + 40^\circ}{360^\circ} \leq N \leq \frac{450^\circ + 40^\circ}{360^\circ} \Rightarrow -0,5 \leq N \leq 1,36 \Rightarrow N = 0; 1$$

Итого 6 корней.

И еще один способ. На этот раз от учителя математики средней школы № 66 г. Гомеля Гайкевич Ирины Владимировны. Показываю только финальную часть ее решения, так как начало у нас одинаковое



Ответ: 6.

В9. У пирамиды $SABCD$ и $STKP$ будут одинаковые высоты. Поэтому отношение их объемов будет равно отношению площадей основания. Пусть $AB = a$, $BC = b$. Тогда $S_{ABCD} = a \cdot b$. Найдем площадь треугольника TKP . Его площадь напрямую находить не очень удобно. Поэтому найдем ее как разность площади прямоугольника $ABCD$ и всего того, что не занято треугольником TKP .

$$S_{TKP} = S_{ABCD} - S_{BVTW} - S_{WTPA} - S_{VCKT} - S_{PKD}$$

Таким образом, нам надо найти площади двух трапеций ($WTPA$ и $VCKT$), площадь прямоугольника $BVTW$ и площадь треугольника PKD .

$$S_{BVTW} = \frac{a}{4} \cdot \frac{b}{4} = \frac{ab}{16}, S_{BVTW} = \frac{\frac{b}{4} + \frac{b}{2}}{2} \cdot \frac{3}{4} a = \frac{\frac{3b}{4}}{2} \cdot \frac{3}{4} a = \frac{9ab}{32},$$

$$S_{VCKT} = \frac{\frac{a}{4} + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{3}{4} b = \frac{\frac{3a}{4}}{2} \cdot \frac{3}{4} b = \frac{9ab}{32}, S_{PKD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{8}$$

Окончательно получим

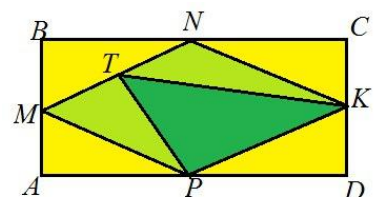
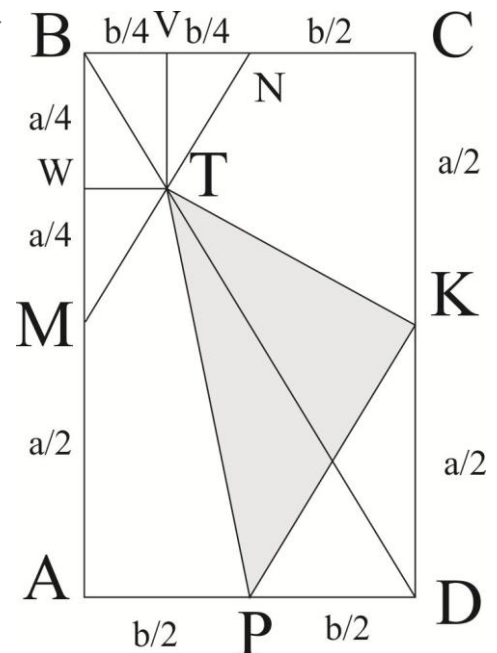
$$S_{TKP} = ab - \frac{ab}{16} - \frac{9ab}{32} - \frac{9ab}{32} - \frac{ab}{8} = \frac{ab}{4}$$

А теперь вернемся к объемам

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} ab \cdot h \Rightarrow \frac{V_{SABCD}}{V_{STKP}} = \frac{\frac{1}{3} ab \cdot h}{\frac{1}{3} \frac{ab}{4} \cdot h} = 4 \Rightarrow V_{SABCD} = V_{STKP} \cdot 4 = 13 \cdot 4 = 52$$

И опять альтернативное решение от репетитора Владимира Лазовского. Площадь салатных частей равна площади зеленой. В сумме они равны площади желтых частей. Значит площадь зеленой части = $1/4$ площади прямоугольника.

Ответ: 52.



B10. Неравенства с модулем можно разделить на три основных типа:

1. В левой части неравенства находится выражение под модулем. В правой – все остальное. При этом модуль **меньше** выражения справа.
2. В левой части неравенства находится выражение под модулем. В правой – все остальное. При этом модуль **больше** выражения справа.
3. Сложные неравенства с модулем.

Основные способы решений неравенств с модулем во многом совпадают с методами решения уравнений с модулем. Единственное отличие связано с тем, что, решая неравенства с модулем (как, впрочем, и неравенства вообще), нужно очень внимательно совершать равносильные переходы и следить не только за тем, чтобы не приобрести новые решения, но и за тем, чтобы не потерять уже имеющиеся.

Стандартный путь решения неравенств с модулем заключается в том, что координатная прямая разбивается на промежутки (границами этих промежутков являются нули подмодульных выражений), а затем неравенство решается на каждом из промежутков.

Этот метод работает всегда. Правда, в отдельных случаях может быть затруднена его техническая реализация. Например, когда очень тяжело или невозможно найти корни подмодульных выражений. Однако, это сложности иного плана. Нужно понимать, что раскрытие модуля по определению неизменно приводит к цели. Конечно же, этот метод не является оптимальным: в условиях централизованного тестирования важен не только результат, но и то время, которое потрачено на его получение.

Рассмотрим методы, не связанные с поиском нулей функций, стоящих под знаком модуля.

ПРИМЕР. Решите неравенство $|2x - 3| < 5$.

Разумеется, это неравенство можно решить просто раскрыв модуль (как мы это делали в при решении уравнений). Однако в подобных примерах, когда в одной части модуль, а в другой все остальное и при этом модуль **МЕНЬШЕ** выражения, стоящего по другую сторону знака неравенства, удобно пользоваться следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно **СИСТЕМЕ**

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

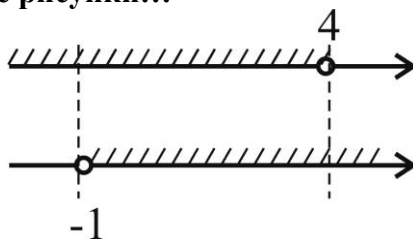
В частности, неравенство вида $|f(x)| < a$ ($a > 0$) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}$$

Таким образом, у нас получается система

$$\begin{cases} 2x - 3 < 5 \\ 2x - 3 > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > -1 \end{cases}$$

Не ленитесь делать пояснительные рисунки!!!



Так как мы имеем дело с системой неравенств, то мы берем только общие решения. **Ответ:** $-1 < x < 4$.

Как запомнить, что в данном случае у нас будет именно система, а не совокупность? Важное мнемоническое правило. Если модуль **МЕНЬШЕ**, то решений будет **МАЛО**. Следовательно, будет система, так как при решении системы мы берем только **ОБЩИЕ** решения.

Вернемся к нашему примеру. Получаем систему из двух неравенств

$$\begin{cases} |x^2 - 6x| - 8 < 8 \\ |x^2 - 6x| - 8 > -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x^2 - 6x| < 16 \\ |x^2 - 6x| > 0 \end{cases}$$

Второе неравенство нам не особо интересно, так как $|x^2 - 6x| > 0$ при любых x кроме 0 и 6. Решим первое неравенство

$$|x^2 - 6x| < 16 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x < 16 \\ x^2 - 6x > -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0 \\ x^2 - 6x + 16 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-8)(x+2) < 0 \\ D < 0 \Rightarrow x \in R \end{cases}$$

Самостоятельно нанесите решение на ось и укажите целые решения.

Ответ: 21.

В11. Обязательно делаем пояснительный рисунок. Для решения этой задачи нам надо будет вспомнить одно из основных свойств медиан треугольника и кое-что о подобии треугольников. Начнем с медиан.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. По условию задачи точка K_1 делит медиану в отношении 1:5 считая от вершины. Для того, чтобы проще было понять дальнейшие рассуждения, я нанес на медиану KT точки K_2, K_3 и K_4 . Эти точки делят медиану на 6 одинаковых частей. Пусть длина одной части равна x . Тогда отрезок $KO = 4x$, а отрезок $K_1O = 3x$. Аналогичные рассуждения можно провести и для точек M_1 и N_1 .

Теперь рассмотрим треугольники OKM и OM_1K_1 . Эти треугольники будут подобны (подобие очень просто доказывается; попробуйте сделать это самостоятельно). Коэффициент подобия будет равен отношению сторон OK_1 и OK , то есть $3/4$ (если бы мы взяли отношение OK к OK_1 , то коэффициент подобия был бы $4/3$; принципиально решение от этого не изменится). По свойствам подобных треугольников, периметры треугольников будут отличаться в количество раз, равное коэффициенту подобия. Аналогичные рассуждения можно применить для остальных пар треугольников: OM_1N_1 и OMN , ON_1K_1 и ONK . Поэтому подобны треугольники KMN и $K_1M_1N_1$. Их коэффициент подобия тоже будет равен $3/4$. Пусть стороны треугольника KMN равны a, b и c . Тогда путь, пройденный точкой A будет равен

$$S_A = 5P_{KMN} = 5(a+b+c)$$

С другой стороны путь это произведение скорости на время движения

$$5(a+b+c) = x \cdot t$$

Аналогичные рассуждения применим для точки B . При этом помним, что периметр треугольника $K_1M_1N_1$ будет равен периметру треугольника KMN умноженному на коэффициент подобия

$$S_B = P_{K_1M_1N_1} = N \left(\frac{3}{4}(a+b+c) \right) = 3x \cdot t \Rightarrow N \left(\frac{3}{4}(a+b+c) \right) = 3x \cdot t,$$

где N – количество раз, которое точка B сможет пройти по периметру треугольника $K_1M_1N_1$. Разделим одно выражение на другое. Получим

$$\frac{N \cdot \frac{3}{4}(a+b+c)}{5(a+b+c)} = \frac{3x \cdot t}{x \cdot t} \Rightarrow N = 20$$

Ответ: 20.

В12. Более подробной я оформлю решение этой задачи в ближайшее время. А пока постарайтесь разобраться самостоятельно.

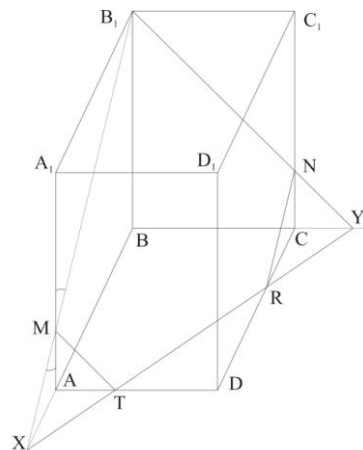
$$S = S_{XYB_1} - 2S_{XMT}$$

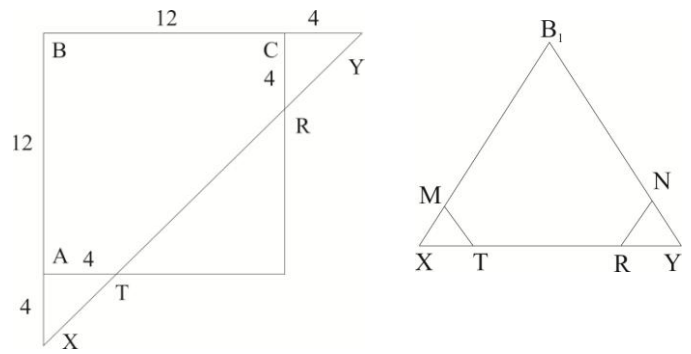
$$S_{XYB_1} = \frac{1}{2} XB_1 \cdot B_1Y \sin(XB_1Y) = \frac{\sqrt{3}}{4} (XB_1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (16\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 256 \cdot 2 = 128\sqrt{3}$$

$$S_{XMT} = \frac{1}{2} XM \cdot MT \sin(XMT) = \frac{\sqrt{3}}{4} (MX)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 16 \cdot 2 = 8\sqrt{3}$$

$$S = 128\sqrt{3} - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{3} = 128\sqrt{3} - 16\sqrt{3} = 112\sqrt{3}$$

$$\frac{S}{\sqrt{3}} = \frac{112\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 112$$





И опять решение от Ольги Алексеевны Голик.

В 12

$AF : FD = 4 : 8 = 1 : 2$
 $DK : OK = 2 : 1$
 $OD = 6\sqrt{2}$ ($\frac{1}{2}$ диаг. $ABCD$)
 $OK = \frac{1}{3} OD = 2\sqrt{2}$
 (из подобия $\triangle FDE$ и $\triangle ADC$)

$BK = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
 из $\triangle B_1BK$
 $B_1K = \sqrt{8^2 + 16^2} = \sqrt{8^2(2+4)} = 8\sqrt{6}$

$\cos \varphi = \frac{BK}{B_1K} = \frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_{\text{проекция}} = S_{FAEDC} = S_{ABCD} - S_{FDE} = 12^2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 12^2 - 32 = 4^2(9-2) = 16 \cdot 7 = 112$

$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{проекция}}}{\cos \varphi} = \frac{112}{1/\sqrt{3}} = 112\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{S}{\sqrt{3}} = 112$

112

Ответ: 112.