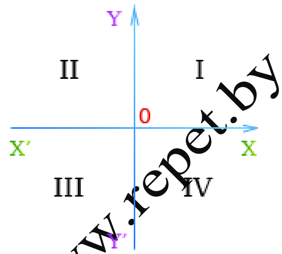
В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории. Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.

Если у вас есть более красивые решения отдельных задач – поделитесь! ☺

Я могу допускать неточности в решениях. А иногда даже ошибки. Нашли? Сообщите мне об этом, пожалуйста.

2019/2020, 2 этап, второй вариант



A1. Смотрим на картинку и решаем задачу самостоятельно. Если картинка не помогла, то у вас очень большие проблемы. **Ответ:** 4.

A2. Систему из представленных неравенств можно объединить в одно неравенство: $\sqrt{29} < x < \sqrt{37}$. Очевидно, что квадратный корень из 29 чуть больше 5 (но меньше 6), а квадратный корень из 37 чуть больше 6 (но меньше 7). Дальше сами. **Ответ:** 3.

A3. На ноль делить нельзя (по крайней мере в школе; в вузе вам расскажут когда и как это делать). В знаменателе дроби ноль получится при $x = 7$. **Ответ:** 2.

A4. Если вы не знаете как решить задачу по геометрии, то просто ищите подряд все возможные величины: углы, стороны, площади. Рано или поздно вы придете к той величине, которая нужна вам по условию задачи. У угла 1 есть вертикальный друг – угол 1`. Сумма углов 1` и 2 равна 180 градусов. Это значит, что прямые a и b параллельны. Перемещаемся в сторону углов 3 и 4. Так как прямые параллельны, то угол 4 будет равен углу, смежному с углом 3. Дальше сами. **Ответ:** 5.

A5. Оценим координаты точек: $C\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\cdot 3{,}14}{6}\approx 2{,}5$, $D\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\frac{7\cdot 3{,}14}{3}\approx 7{,}1$. Я очень надеюсь, что вы самостоятельно найдете количество целых чисел между этими двумя точками. **Ответ:** 4.

A6. В таких примерах надо всегда пытаться найти самый оптимальный метод вычисления

$$\frac{21}{23}-\frac{7}{23}\cdot\frac{4}{9}=\frac{3\cdot 7}{23}-\frac{7}{23}\cdot\frac{4}{9}=\frac{7}{23}\left(\frac{3}{1}-\frac{4}{9}\right)=\frac{7}{23}\left(\frac{27}{9}-\frac{4}{9}\right)=\frac{7}{23}\cdot\frac{23}{9}=\frac{7}{9}.$$ **Ответ:** 5.

A7. Проверим каждое из утверждений.
1. Синус первой и второй четверти всегда положительны. Не верно.
2. Вспомним формулы приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$. Утверждение верно.

Дальше можно не проверять, но мы все же убедимся в том, что правы.
3. Косинус первой и второй четверти имеют разные знаки. Не верно.
4. Тангенс третьей четверти положителен. Не верно.
5. Котангенс второй четверти отрицателен. Не верно. **Ответ:** 2.

A8. Пусть x количество коробок одного вида. Тогда $7x$ количество коробок другого вида. Общее количество коробок равно $8x$. Следовательно, общее количество коробок должно быть кратно 8. Думаете нам поможет признак делимости на 8? Хахаха! Почему хахаха? Читаем.
Число делится на 8 тогда и только тогда, когда ***три*** *его последние цифры – нули, либо когда трехзначное число, образованное тремя его последними цифрами, делится на 8. Например, число* 36578328 *делится на 8, так как* 328 *на 8 делится.*
Ну а так как у нас все числа максимум трехзначные, то придется каждое из чисел проверять вручную. И этому условию удовлетворяет только число 176, которое при делении на 8 дает частное 22. **Ответ:** 4.

A9. У плота нет двигателя и его скорость движения будет равна скорости течения реки. Выберем удобную точку и найдем скорость течения. Удобной будет точка, координаты которой известны. Мы можем выбрать несколько точек (например, для пути 0,5 км и 1 км). Пусть это будет точка, в которой плот преодолел 1 км. При этом он затратил время, равно 8/12 часа (обратите внимание, что 1 час представлен 12 клетками). Следовательно,

$$\upsilon_{течения}=\frac{l_1}{t_1}=\frac{1\text{ км}}{\frac{8}{12}\text{ часа}}=1,5\ \text{(км/ч)}.$$

Так как катер двигается по течению реки, его скорость относительно берега будет равна сумме собственной скорости и скорости течения реки. Эту скорость мы тоже можем найти из графика, выбрав для этого удобную точку. Пусть это будет точка, в которой катер преодолел 8 км. При этом он сделал это за время, равное 5/12 часа. Следовательно,

$$\upsilon_{катера}+\upsilon_{течения}=\frac{l_2}{t_2}=\frac{8\text{ км}}{\frac{5}{12}\text{ часа}}=19,2\ \text{(км/ч)}$$

Собственная скорость катера будет равна разности найденных скоростей. Остались вопросы о движении катера по реке? Скачайте у меня с сайта главу «Кинематика» и внимательно изучите тему «относительность движения». **Ответ:** 1.

A10. Ось ординат являясь диагональю разбивает параллелограмм на два равновеликих треугольника: ADB и DBC. Переверните рисунок на 90 градусов и посмотрите как просто найти площадь любого из этого треугольников. Пусть это будет треугольник DBC. Его основание DB равно 10 клеточек. Высота, опущенная из вершины C на основание DB, равна 3 клеточки. Я надеюсь вы помните формулу для нахождения площади треугольника через основание и высоту, проведенную к основанию. И не забудьте, что площадь параллелограмма равна удвоенному значению площади треугольника DBC. Так же не забываем, что цена одной клеточки равна 2 единицы. **Ответ:** 2.

A11. Этот пример можно решать по–разному. Можно внести множитель под корень. При этом не забываем, что мы имеем право вносить только положительный множитель. Поэтому выплевываем минус

$$\left(\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}}=-\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}}=-\sqrt{\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)^2\cdot\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)}{\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)}}=$$

$$=-\sqrt{\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)}=-\sqrt{\left(\sqrt{15}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=-\sqrt{10}$$

Или можно домножить на сопряженное

$$\left(\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{15}+\sqrt{5}}}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2}{\left(\sqrt{15}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)}{\sqrt{10}}=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}{\sqrt{10}}=\frac{-10}{\sqrt{10}}=\frac{-\sqrt{10}\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=-\sqrt{10}$$

Какой вариант выбрать решать только вам. **Ответ:** 3.

A12. Ну как–то очень просто и не интересно

$$BM\cdot MA=DB\cdot CM\quad\Rightarrow\quad DB=\frac{BM\cdot MA}{CM}=\frac{12\cdot 27}{9}=36$$

Значит диаметр окружности DC = DM + MC = 36 + 9 = 45. Зная диаметр я надеюсь вы сможете найти радиус окружности. **Ответ:** 5.

A13. Проверим каждое из утверждений.

1. Помните, что на 0 делить нельзя? Так вот при $x = 3$ у нас будет деление на 0. Не верно.
2. Первое неравенство всегда (кроме $x = –2$) больше нуля. Если во втором неравенстве перенести 2 в правую часть, то мы получим ложное утверждение. Не верно.
3. А вот тут все верно, так как $\sqrt{x^2}=|x|$ и $x^2\geq 25\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2}\geq\sqrt{25}\ \Rightarrow\ |x|\geq 5$

4. Подставьте любое число и убедитесь сами. Не верно.
5. Выражение в четной степени будет всегда неотрицательно, то есть либо равно 0 либо больше 0. Верно.
Ответ: 3.

A14. Чтобы найти площадь описанной окружности надо знать ее радиус, который равен половине гипотенузы. Чтобы найти гипотенузу надо найти катеты. Так как длины катетов являются корнями уравнения, то воспользуемся теоремой Виета, чтобы найти их произведение и сумму

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=6 \text{ и } x_1+x_2=-\frac{b}{a}=9$$

А теперь начнем вычислять.

$$S=\pi R^2=\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}\right)^2=\pi\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2}{4}=\pi\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{4}$$

Ответ: 5.

A15. Если функция убывающая, то наименьшее значение она принимает при максимальном аргументе. Оценим каждый из аргументов

$$\sqrt{6}\approx 2,4, \qquad 1,5 \qquad \frac{2}{3}\approx 0,67 \qquad 0,9 \qquad \sqrt{10^{-2}}=10^{-1}=0,1$$

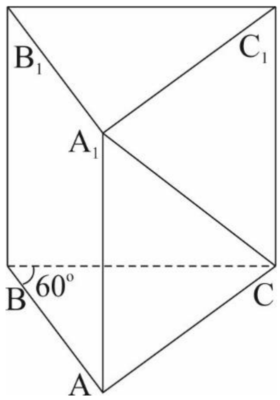
Надеюсь, что ответ очевиден. **Ответ:** 1.

A16. В одном центнере 100 кг. Следовательно, в овощехранилище было $\frac{326\cdot b}{100}=3,26b$ центнеров картошки. Потом в овощехранилище привезли $43,09\cdot m$ центнеров картошки. Дальше сами. **Ответ:** 4.

A17. Решаем просто линейное уравнение

$$3x-4-\frac{9x-5}{7}=\frac{2x-3}{2} \;\Rightarrow\; \frac{3x-4}{1}-\frac{9x-5}{7}=\frac{2x-3}{2} \;\Rightarrow\; \frac{7\cdot 2\cdot\left(3x-4\right)}{7\cdot 2}-\frac{2\cdot\left(9x-5\right)}{7\cdot 2\cdot}=\frac{7\cdot\left(2x-3\right)}{7\cdot 2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 14\cdot\left(3x-4\right)-2\cdot\left(9x-5\right)=7\cdot\left(2x-3\right)$$

Такие уравнения вы должны уметь решать самостоятельно. Только аккуратно с раскрытием скобок, перед которыми стоит минус. Не уверенно себя чувствуете? Качайте у меня с сайта тему «Уравнения» и внимательно изучайте первый параграф. **Ответ:** 2.



A18. Так как сумму углов любого треугольника 180°, то угол B равен 60°.
По теореме синусов для треугольника ABC найдем AC

$$2R=\frac{AC}{\sin\left(\angle ABC\right)} \;\Rightarrow\; AC=2R\sin\left(\angle ABC\right)=2\cdot 5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=15$$

Зная площадь AA_1C_1C найдем AA_1

$$S_{AA_1C_1C}=AC\cdot AA_1 \;\Rightarrow\; AA_1=\frac{S_{AA_1C_1C}}{AC}=\frac{120}{15}=8$$

А теперь по теореме Пифагора найдем диагональ A_1C грани AA_1C_1C, которая будет являться диаметром описанной около грани окружности (ведь грань представляет из себя прямоугольник). Получим

$$A_1C=\sqrt{\left(A_1A\right)^2+\left(AC\right)^2}=\sqrt{8^2+15^2}=17 \;\Rightarrow\; D=17 \;\Rightarrow\; R=\frac{D}{2}=8,5$$ **Ответ:** 1.

A19. Так как $\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, то

$$\sin 4x\cdot\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)-\cos 4x\cdot\sin\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(4x-\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(4x-x+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(3x+\frac{5\pi}{6}\right)$$

Следовательно,

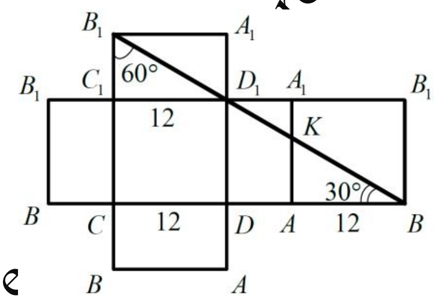
$$\sin\left(3x+\frac{5\pi}{6}\right)=1 \;\Rightarrow\; 3x+\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi n \;\Rightarrow\; 3x=\frac{3\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \;\Rightarrow\; 3x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n \;\Rightarrow\; x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n$$

Наибольший отрицательный корень будет равен $x_1=-\dfrac{\pi}{9}$, наименьший положительный корень равен $x_2=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2}{3}\pi\cdot 1=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{6\pi}{9}=\dfrac{5\pi}{9}$. Их сумма равна $\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{4\cdot 180^{\circ}}{9}=80^{\circ}$. **Ответ:** 3.

А20. Достаточно простая задача. Рассмотрим треугольник $B_1C_1D_1$. Найдем B_1D_1

$$\sin\left(\angle D_1B_1C_1\right)=\frac{C_1D_1}{B_1D_1} \;\Rightarrow\; B_1D_1=\frac{C_1D_1}{\sin\left(\angle D_1B_1C_1\right)}=\frac{C_1D_1}{\sin 60^{\circ}}=\frac{12}{\sqrt{3}/2}=\frac{24}{\sqrt{3}}=\frac{24\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}$$

Рассмотрим треугольник D_1A_1K. Найдем D_1K



$$\cos\left(\angle A_1D_1K\right)=\frac{D_1A_1}{D_1K} \;\Rightarrow\; D_1K=\frac{D_1A_1}{\left(\angle A_1D_1K\right)}=\frac{D_1A_1}{\cos 30^{\circ}}$$

Отрезок D_1A_1 равен B_1C_1. Его найдем из треугольника $B_1C_1D_1$

$$\mathrm{tg}\left(\angle D_1B_1C_1\right)=\frac{C_1D_1}{B_1C_1} \;\Rightarrow\; B_1C_1=\frac{C_1D_1}{\mathrm{tg}\left(\angle D_1B_1C_1\right)}=\frac{C_1D_1}{\mathrm{tg}60^{\circ}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$$

Значит D_1K будет равен

$$D_1K=\frac{D_1A_1}{\cos 30^{\circ}}=\frac{4\sqrt{3}}{0,5}=8\sqrt{3}$$

Рассмотрим треугольник AKB. Найдем KB

$$\cos\left(\angle KBA\right)=\frac{AB}{KB} \;\Rightarrow\; KB=\frac{AB}{\cos\left(\angle KBA\right)}=\frac{AB}{\cos\left(30^{\circ}\right)}=\frac{12}{\sqrt{3}/2}=\frac{24}{\sqrt{3}}=\frac{24\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}$$

Надеюсь, что сумму длин отрезков вы сможете найти самостоятельно. **Ответ:** 1.

Часть В

В1. Немного теории о геометрической прогрессии. Рассмотрим последовательность чисел 3, –6, 12, –24, 48 …

Каждый последующий член получается умножением предыдущего члена на одно и тоже число. Такая последовательность называется геометрической прогрессией. Геометрической прогрессией называется последовательность чисел b_1, b_2, …, b_n, … , для которой имеют место соотношения:

b_1 – заданное число, первый член прогрессии; $b_n=b_{n-1}\,q$ – n–й член прогрессии ($n\geq 2$);

q – знаменатель прогрессии ($q\neq 1$).

$$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\ldots=\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Если $|q|<1$, то прогрессия называется бесконечно убывающей.

Формула n–го члена прогрессии: $b_n=b_1q^{n-1}$. Сумма n первых членов прогрессии: $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Иногда формулу для суммы записывают в виде $S_n=\dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. Принципиальной разницы в формулах нет.

Записывайте как вам удобно.

Решаем по порядку.

1. Как найти первый член прогрессии через формулу для суммы n членов прогрессии? Подставить вместо n единицу. Получим

$$S_1=\frac{5\left(4^n-1\right)}{16}=\frac{5\left(4^1-1\right)}{16}=\frac{15}{16}$$

2. Знаменатель прогрессии равен отношения второго члена прогрессии к первому. Значит найдем сумму двух членов прогрессии, потом вычтем из нее первый член прогрессии и найдем величину второго члена прогрессии. После этого найдем знаменатель прогрессии

$$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{S_2-b_1}{b_1}=\frac{\frac{5\left(4^n-1\right)}{16}-b_1}{b_1}=\frac{\frac{5\left(4^2-1\right)}{16}-\frac{15}{16}}{\frac{15}{16}}=\frac{5\cdot 15-15}{15}=\frac{15(5-1)}{15}=4$$

3. Все, про формулу для суммы, которая дана в условии задачи, мы забываем. Почему? А зачем она нам когда мы знаем первый член прогрессии b_1, знаменатель прогрессии q и у нас есть формула n–го члена прогрессии: $b_n=b_1q^{n-1}$ (из теории выше). Третий член прогрессии будет равен

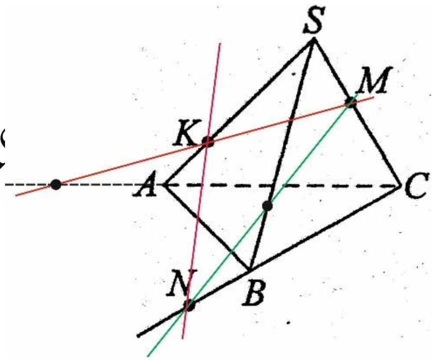
$$b_3=b_1q^{3-1}=\frac{15}{16}\cdot 4^2=15$$

Пятый член прогрессии будет равен

$$b_5=b_1q^{5-1}=\frac{15}{16}\cdot 4^4=15\cdot 16=240$$

Их сумма будет равна 255. **Ответ:** А6Б5В2.

В2. Обязательно делаем дополнительные построения на рисунке. Они не обязательны, но с ними нам проще будет отвечать на вопросы.



1. Прямая MN пересекает плоскость ASC в точке M, но не принадлежит ей. Утверждение не верно.
2. Тут для вас должно быть все очевидно. Если не очевидно, то просто попытайтесь изобразить плоскость KMN. Утверждение верно.
3. Прямая NK пересекает плоскость ASB в точке K, но не принадлежит ей. Утверждение не верно.
4. И опять ответ должен быть очевиден. Утверждение верно.
5. Точка M принадлежит SC, точка N принадлежит продолжению BC. Утверждение верно.
6. Прямая MK пересекает плоскость ASB в точке K, но не принадлежит ей. Утверждение не верно.

Ответ: 245.

В3. Пусть количество заказанных кирпичей равно x. Тогда по условию задачи

Поставщик	Стоимость одного кирпича	Стоимость доставки	Стоимость всего заказа (кирпичи + доставка)
1	0,54	101	$0{,}54x+101$
2	0,81	52	$0{,}81x+52$
3	1,22	0	$1{,}22x$

По условию задачи условия второго поставщика должны быть самыми выгодными, то есть стоимость всего заказа у него должна быть меньше, чем стоимость заказа и первого и третьего поставщиков

$$\begin{cases}0,54x+101>0,81x+52\\1,22x>0,81x+52\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}101-52>0,81x-0,54x\\1,22x-0,81x>52\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}49>0,27x\\0,41x>52\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x<\frac{49}{0,27}\\x>\frac{52}{0,41}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<\frac{4900}{27}\\x>\frac{5200}{41}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<181\frac{13}{27}\\x>126\frac{34}{41}\end{cases}\Rightarrow 126\frac{34}{41}<x<181\frac{13}{27}$$

Так как кирпичи продаются только целыми, то наименьшее количество равно 127, а наибольшее 181. Сумма этого количества равна 308. **Ответ:** 308.

В4. Ни в коем случае не надо пытаться строить графики этих двух функций. На самом деле нам надо просто решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными. И проще всего решить эту систему методом подстановки. Выразим y из второго уравнений и подставим в первое

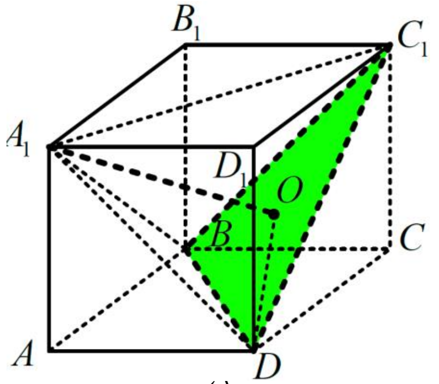
$$y=3x+2\ \Rightarrow\ x^2+(3x+2)^2=20\ \Rightarrow\ x^2+9x^2+12x+4-20=0\ \Rightarrow\ 10x^2+12x-16=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5x^2+6x-8=0\ \Rightarrow\ \begin{matrix}x_1=-2\\x_2=\frac{4}{5}\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}y_1=3x_1+2=3(-2)+2=-4\\y_2=3x_2+2=3\left(\frac{4}{5}\right)+2=\frac{22}{5}\end{matrix}$$

Найдем сумму координат точек пересечения и не забываем увеличить ее в 5 раз

$$5\cdot(x_1+x_2+y_1+y_2)=5\cdot\left(-2+\frac{4}{5}-4+\frac{22}{5}\right)=5\cdot\left(-6+\frac{26}{5}\right)=5\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-4$$

Ответ: –4.



B5. Расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1 равна высоте пирамиды $A1BDC_1$. Так как BD, DC_1 и C_1B диагонали ребер куба, то они равны. Тогда точка O – центр окружности, описанной около правильного треугольника BDC_1 со стороной, равной $a\sqrt{2}$, где a – сторона куба. Радиус описанной окружности будет равен

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^3}{4\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\sin\left(60^\circ\right)}=\frac{a^3 2\sqrt{2}}{4a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Запишем теорему Пифагора для треугольника A_1OD. Обращаю ваше внимание на то, что $OD = R$

$$\left(A_1D\right)^2=\left(A_1O\right)^2+\left(OD\right)^2 \Rightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2=\left(6\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow 2a^2=108+\frac{2}{3}a^2 \Rightarrow \frac{4}{3}a^2=108 \Rightarrow a=9$$

И помним, что в ответ надо записать площадь полной поверхности куба, которая будет равна площади поверхности одной грани, увеличенной в 6 раз. **Ответ:** 486.

B6. Под корнем четной степени может находиться только неотрицательно выражение, то есть

$$16^{\frac{x+7}{x^2-16}}-1\ge 0 \Rightarrow 16^{\frac{x+7}{x^2-16}}\ge 1 \Rightarrow 16^{\frac{x+7}{x^2-16}}\ge 16^0 \Rightarrow \frac{x+7}{x^2-16}\ge 0$$

Для решения этого неравенства понадобиться метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории, которая обязательна к изучению. Так же эта теория пригодится вам при решении задания B8.

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.

Поняли что–нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $(6–x)(x+3)\le 0$

При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида ($x \pm a$), а не ($a \pm x$) и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже. У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем –1 из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3)\le 0$$

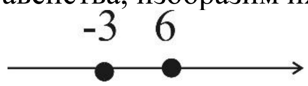
Сокращая на –1 не забываем поменять знак неравенства на противоположный

$$(x-6)(x+3)\ge 0$$

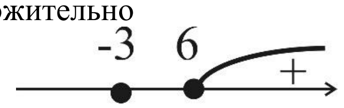
Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступать к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

$$x-6=0 \Rightarrow x=6 \text{ и } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.

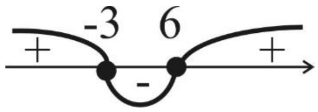


Если все множители неравенства записаны в виде($x \pm a$) и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!! Не верите? Можем проверить. Пусть x=7, тогда $(x–6)(x+3) = (7–6)(7+3)=1\cdot10=10>0 \Rightarrow$ выражение положительно



А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства уникален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный

В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства «≥», то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка: (–∞; –3] и [6; +∞).

И еще один пример.

ПРИМЕР: *Найдите наибольшее целое решение неравенства* $(x-2)(x^2+x-6)<0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

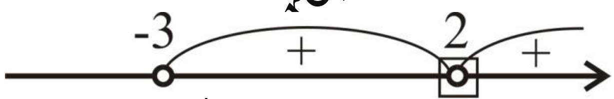
$$x^2+x-6=0 \;\Rightarrow\; x_1=-3,\; x_2=2 \;\Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3).$$

Перепишем неравенство в новом виде: $(x-2)(x-2)(x+3)<0 \;\Rightarrow\; (x-2)^2(x+3)<0$

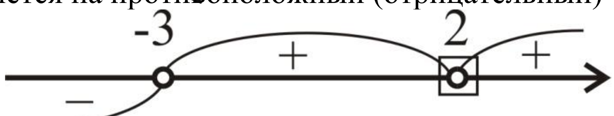
При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.

Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно

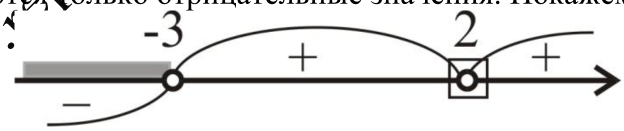
При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение (*x* – 2) возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!



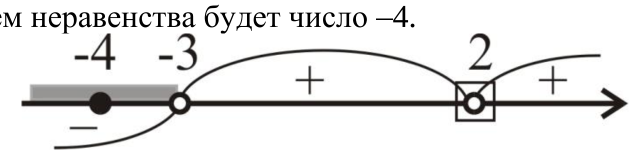
В точке –3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой



Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до –3 (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число –4.



Ответ: –4.

При решении неравенств:

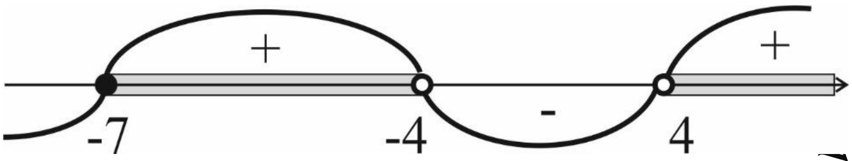
1. Всегда переносите все слагаемые в левую часть (за исключением линейных неравенств).
2. Приводите дроби к общему знаменателю (вспоминайте тему уравнения).
3. Если в числителе и в знаменателе получившихся дробей есть квадратичные трехчлены – раскладывайте их на множители.
4. Все выражения в неравенстве представляйте в виде ($x \pm a$), а не ($a \pm x$).
5. Не забывайте менять знак неравенства при умножении/делении правой и левой части неравенства на отрицательно число.
6. Всегда делайте пояснительный рисунок!!!

7. Когда вы ищите нули числителя или знаменателя, вы решаете уравнение, а не неравенство. Знак неравенства пишется только один раз и только в самом неравенстве. Нули числителя, не совпадающие с нулями знаменателя, отмечайте на числовой оси **точками** (если неравенство нестрогое; если строгое – кружочками), а нули знаменателя – только **кружочками** (на ноль делить нельзя).
8. Всегда рисуйте змейку. Когда змейка выше оси – знак неравенства положительный, ниже оси – знак неравенства отрицательный.
9. Не забывайте отражать змейку, если выражение с нулевой точкой находится в четной степени.

А теперь вернемся к нашему неравенству.

$$\frac{x+7}{x^2-16}\geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{x+7}{(x-4)(x+4)}\geq 0$$

Осталось нанести нули числителя и знаменателя на координатную ось и нарисовать змейку. И не забываем выколоть нули знаменателя. При этом ноль числителя будет решением, так как неравенство не строгое.



Решениями неравенства будут числа –7, –6 и –5. **Ответ:** –18.

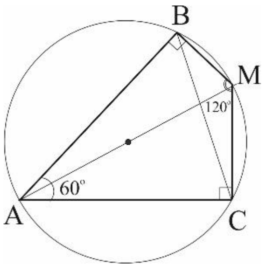
B7. Соединив точки ABMC мы получим четырехугольник. При этом сумма противоположных углов (углы B и C) равна 180 градусов. Следовательно, вокруг этого четырехугольника можно описать окружность. Рассмотрим треугольник BMC. По теореме косинусов

$$BC^2=BM^2+MC^2-2BM\cdot MC\cdot\cos\alpha \;\Rightarrow\; BC^2=\left(5\sqrt{13}\right)^2+\left(2\sqrt{13}\right)^2-2\left(5\sqrt{13}\right)\cdot\left(2\sqrt{13}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow$$

$$BC^2=25\cdot 13+4\cdot 13+10\cdot 13=39\cdot 13=3\cdot 13^2 \;\Rightarrow\; BC=13\sqrt{3}$$

Так как вокруг четырехугольника ABMC можно описать окружность, то вокруг треугольника BMC тоже можно писать окружность. Следовательно, по теореме синусов

$$2R=\frac{BC}{\sin(\angle BMC)}=\frac{13\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=26$$



А теперь посмотрим на треугольник ABM. Он прямоугольный и вокруг него описана окружность. Следовательно, гипотенуза этого треугольника будет являться диаметром описанной вокруг треугольника окружности. Значит, AM = 2R = 26. **Ответ:** 26.

B8. Обязательно повторите теорию к задаче B6.
Немного преобразуем неравенство. Для начала преобразуем первый множитель в числителе. Для этого сделаем замену $x^2=t$ и разложим квадратичный трехчлен при помощи корней квадратного уравнения

$$t^2-7t-18=0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} t_1=9 \\ t_2=-2 \end{matrix} \;\Rightarrow\; t^2-7t-18=(t-9)(t+2)=\left(x^2-9\right)\left(x^2+2\right)=(x-3)(x+3)\left(x^2+2\right)$$

Осталось преобразовать знаменатель. Надо увидеть формулу сокращенного умножения в знаменателе. Не увидели? Тогда раскладываем через корни квадратного уравнения. Если же у вас с такими преобразованиями есть проблемы, то рекомендую вам скачать у меня с сайта тему «Уравнения» и внимательно изучить параграф 1.02.

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$

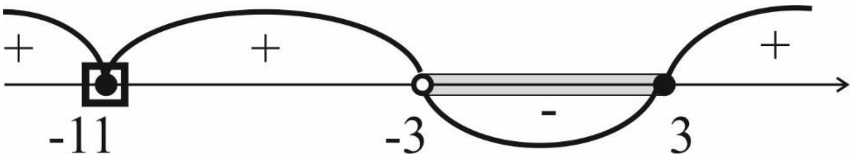
После преобразований получим

$$\frac{(x-3)(x+3)\left(x^2+2\right)(x+11)^2}{(x+3)^3}\leq 0$$

Множитель $(x+3)$ можно сократить, ничего страшного не произойдет, так как он останется в знаменателе. Вот если бы он находился и в числителе и в знаменателе в одной степени и после сокращения исчезал, то тогда мы должны были бы обязательно сделать себе пометку, что число –3 выкалывается из решений. Множитель $\left(x^2+2\right)$ можно опустить, так как он всегда строго больше нуля. Окончательно получим

$$\frac{(x-3)(x+3)(x^2+2)(x+11)^2}{(x+3)^3}\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-3)(x+11)^2}{(x+3)}\le 0$$

Осталось нанести нули числителя и знаменателя на координатную ось и нарисовать змейку. И не забываем выколоть нули знаменателя. При этом ноль числителя будет решением, так как неравенство не строгое.



Решениями данного неравенства будут -2, -1, 0, 1, 2, 3 и -11 (очень важно не забыть про последнее решение). Всего получилось 7 решений. Наименьшее -11. **Ответ:** -77.

B9. Обычно иррациональные уравнения решаются достаточно просто – делаем перегруппировку (а иногда нет), возводим обе части во вторую степень и дальше по обстоятельствам. В нашем же случае такая схема не работает.

Для начала нам надо применить метод выделения полного квадрата к подкоренным выражениям. Что это за метод такой? С формулой сокращенного умножения $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ мы привыкли иметь дело в случаях, когда она очевидна. Например, $a^2 - 4ab + 4b^2 = (a-2b)^2$ или $a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$. Однако не всегда будет очевидно, что перед нами квадрат суммы или разности.

ПРИМЕР. *Упростите выражение* $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$.

Выражение $7-2\sqrt{12}$ мы должны попытаться представить в виде квадрата двучлена, то есть в виде $(a-b)^2$. Вспомним, что $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. В нашем выражении есть слагаемое с коэффициентом 2. Следовательно, $\sqrt{12}$ есть не что иное, как ab. Таким образом, нам надо подобрать два числа, сумма которых равна 7, а произведение 12. Это числа 3 и 4. Следовательно

$$\sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{7-2\cdot\sqrt{4}\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\cdot\sqrt{4}\sqrt{3}+3} = \sqrt{(\sqrt{4})^2 - 2\cdot\left(\sqrt{4}\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4}-\sqrt{3} = 2-\sqrt{3}$$

Мы всегда обязаны помнить, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Именно поэтому мы получаем $2-\sqrt{3}$, а не $\sqrt{3}-2$

Если Вы не смогли подобрать числа (в некоторых задачах могут быть достаточно большие числа, с которыми трудно будет работать), то воспользуйтесь следующим алгоритмом. Одно из слагаемых надо представить в виде $2\sqrt{X}$ (в нашем случае X = 12), второе слагаемое путь равно Y. Тогда мы имеем право записать систему

$$\begin{cases} ab = X \\ a+b = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 12 \\ a+b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 12 \\ b = 7-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(7-a) = 12 \\ b = 7-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 7a + 12 = 0 \\ b = 7-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 4 \\ b = 7-a \end{cases}$$

Мы получим два значения. Не стоит этого пугаться. На самом деле одно из значений будет a, а второе будет b. **В любом случае лучше всего попытаться подобрать числа, чтобы мы получили формулу сокращенного умножения. Метод с системой применяйте только тогда, когда числа не играют.**

Возвращаемся к нашему примеру. Надо увидеть квадрат разности в каждом из подкоренных выражений

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-5}-1}+\sqrt{x-6\sqrt{x-5}+4} = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{(x-5)-2\cdot 2\cdot\sqrt{x-5}+4}+\sqrt{(x-5)-2\cdot 3\cdot\sqrt{x-5}+9} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-5}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-5}-3\right)^2} = 1$$

А вот тут очень важно не облажаться и помнить о том, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Следовательно,

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-5}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-5}-3\right)^2} = 1 \;\Rightarrow\; \left|\sqrt{x-5}-2\right|+\left|\sqrt{x-5}-3\right| = 1$$

А теперь надо догадаться сделать замену! Пусть $\sqrt{x-5} = t$. Получим уравнение $|t-2|+|t-3| = 1$. Решать его будем методом интервалов. Приравняем подмодульные выражения к нулю. Получим $t = 2$ и $t = 3$.

	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$t-2$	$-$	$+$	$+$	
$t-3$	$-$	$-$	$+$	

$1.\, t\in(-\infty;2) \;\Rightarrow\; -(t-2)-(t-3)=1 \;\Rightarrow\; t=2$

Ответ 2 не принадлежит данному интервалу (скобки круглые). И не надо волноваться, что мы получили граничный ответ. Если этот ответ не попал в наши решения в первом интервале, то обязательно попадет во втором.

$2.\, t\in[2;3] \;\Rightarrow\; (x-2)-(x-3)=1 \;\Rightarrow\; 1=1$

Мы получили тождество. Это означает, что любое число, принадлежащее данному интервалу, будет являться корнем уравнения. То есть 2 все же является корнем. Просто из–за того, что в первом интервале 2 не включено, мы получили его как корень во втором интервале, где 2 включено. Но и сейчас не стоит расслабляться. Если все числа из интервала [2;3] являются решениями, то в последнем интервале мы должны получить корень 3. Проверим.

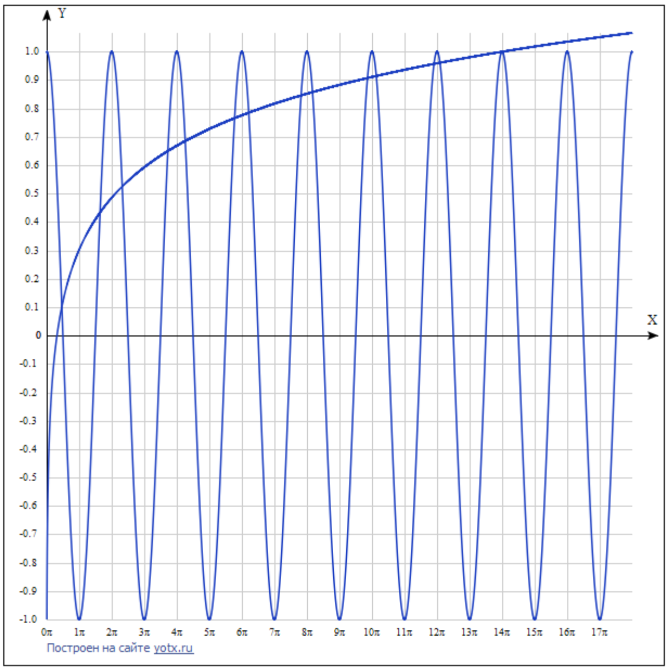
$3.\, t\in(3;\infty) \;\Rightarrow\; (t-2)+(t-3)=1 \;\Rightarrow\; t=3$

Вот мы и получили опять граничный корень. Да, 3 не принадлежит данному интервалу (скобки круглые) и он формально не является корнем уравнения. Но это только для данного интервала. Самое главное, что число 3 попало в корни на предыдущем интервале.
Окончательно получаем (мы имеем право возвести во вторую степень, так как все части неравенства положительны)

$$2\le\sqrt{x-5}\le3 \;\Rightarrow\; (2)^2\le\left(\sqrt{x-5}\right)^2\le(3)^2 \;\Rightarrow\; 4\le x-5\le9 \;\Rightarrow\; 9\le x\le14$$

Сумму целых решений считайте самостоятельно. **Ответ:** 69.

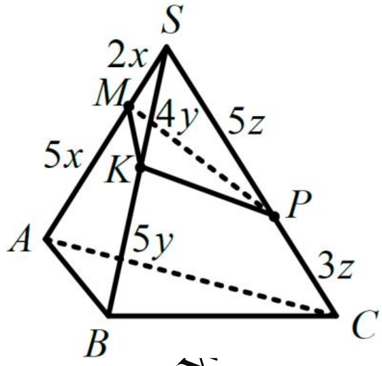
B10. Уравнения такого типа (когда в уравнении представлены две совершенно разные функции) всегда решаются только графически. Да, это не всегда удобно делать, но другого метода решений таких уравнений просто нет. Поэтому строим в одних координатных осях график функции $y_1=\cos x$ и $y_2=\log_{14\pi} x$. Для этого важно помнить, что функция косинуса имеет максимальное значение равное 1 и период равный 2π. Функция логарифма значение 1 примет при $x=14\pi$. Кстати, именно после этой точки функция логарифма станет больше 1 и больше никогда не пересечется с графиком косинуса.



А теперь считаем количество точек пересечения графиков функций. Их всего 14. Но не торопитесь! Для ответа мы должны записать корни, принадлежащие интервалу от 0 до 12,5π. Таких корней всего 13. 14–й корень, который равен 14 π и является наибольшим, мы не считаем. Поэтому окончательно получим

$$\frac{nx_0}{\pi}=\frac{13\cdot14\pi}{\pi}=182.$$ **Ответ:** 182.

B11. Я пытался найти способ, отличный от предложенного авторами. Однако не смог. Поэтому предлагаю посмотреть решение в консультации от РИКЗ.
Ответ: 1887.



B12. Для решения задачи удобно рассмотреть пирамиды PSKM и CSAB с основаниями SKM и SBA соответственно.
Чтобы сравнить объемы пирамид надо знать площади их основания и высоты. Начнем с площадей. Пусть SM=2*x*, SK=4*y*, SP=5*z*. Тогда MA=5*x*, KB=5*y*, PC=3*z*. Площадь треугольника SKM будет равна

$$S_{SKM}=\frac{1}{2}SM\cdot SK\cdot\sin\left(\angle MSK\right)=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 4y\cdot\sin\left(\angle MSK\right)=4xy\sin\left(\angle MSK\right)$$

Площадь треугольника SBA будет равна

$$S_{SBA}=\frac{1}{2}SB\cdot SA\cdot\sin\left(\angle MSK\right)=\frac{1}{2}\cdot 7x\cdot 9y\cdot\sin\left(\angle MSK\right)=\frac{63}{2}xy\sin\left(\angle MSK\right)$$

Треугольники SMK и SAB лежат в одной плоскости. Высоты пирамид, опущенные из вершин P (пусть это будет высота PQ) и C (пусть это будет высота CO) будут параллельны (высоты не изображаем, чтобы не перегружать рисунок). Из подобия треугольников PQS и COS следует, что

$$\frac{CO}{PQ}=\frac{SC}{SP}\quad\Rightarrow\quad\frac{CO}{PQ}=\frac{8}{5}.$$

А теперь можем найти отношение объемов пирамид

$$\frac{V_{CSAB}}{V_{PSMK}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot S_{SBA}\cdot CO}{\frac{1}{3}\cdot S_{SMK}\cdot PQ}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{63}{2}xy\sin\left(\angle MSK\right)}{\frac{1}{3}\cdot 4xy\sin\left(\angle MSK\right)}\frac{8}{5}=\frac{63}{5}$$

Пусть $V_{CSAB}=V$. Тогда $V_{PSMK}=\frac{5}{63}V_{CSAB}=\frac{5}{63}V$ и объем второй части пирамиды CSAB будет равен $V-\frac{5}{63}V=\frac{58}{63}V$. Отношение этих объемов будет равно $\frac{\frac{58}{63}V}{\frac{5}{63}V}=\frac{58}{5}$. По условию задачи мы должны увеличить это значение в 5 раз.
Ответ: 58.