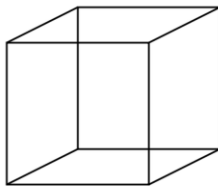


A1. Куб – правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат.



Периметр – сумма длин всех сторон. В нашем случае это сумма длин всех сторон куба. Считаем количество сторон и делим периметр на их количество.

Ответ: 2.

A2. Одно из основных правил школьной математики гласит, что на 0 делить нельзя. Другое гласит, что под квадратным корнем должно быть только положительное число. Поэтому ищем выражение, знаменатель которого обращается в ноль при $x = 3$ либо подкоренное выражение, которое отрицательно при $x = 3$.

Ответ: 5.

A3. Я почти уверен, что даже магабездельники знают, что накрест лежащие углы равны. Следовательно, искомый угол будет равен

$$x = 92^\circ - 44^\circ = 48^\circ.$$

Ответ: 4.

A4. Решаем тупо в лоб

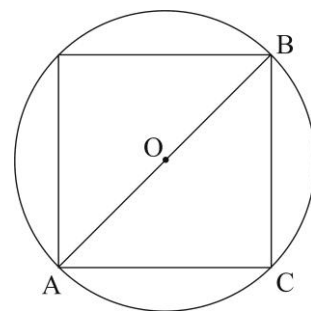
$$\begin{aligned} \left(3\frac{3}{4} : 1,2 - 4\right) \cdot 1\frac{1}{7} - 3,9 &= \left(\frac{15}{4} : \frac{6}{5} - 4\right) \cdot \frac{8}{7} - 3,9 = \left(\frac{15}{4} \cdot \frac{5}{6} - 4\right) \cdot \frac{8}{7} - 3,9 = \\ &= \left(\frac{75}{24} - \frac{4 \cdot 24}{24}\right) \cdot \frac{8}{7} - 3,9 = \frac{75 - 96}{24} \cdot \frac{8}{7} - 3,9 = -1 - 3,9 = -4,9 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

A5. Проведем диагональ у квадрата и рассмотрим получившийся треугольник. Очевидно, что треугольник ABC прямоугольный и половина его гипотенузы будет равна радиусу окружности. Применим теорему Пифагора. Получим

$$AB = 2R = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: 3.



A6. Возьмем за 100% всю массу молока и составим пропорцию

$$\begin{array}{lcl} 2000 \text{ г} & - & 100 \% \\ 64 \text{ г} & - & x \% \end{array} \Rightarrow x = \frac{64 \cdot 100}{2000} = 3,2 \%$$

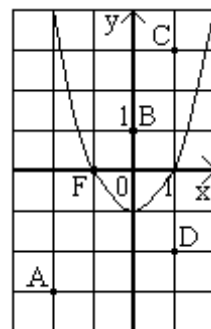
Ответ: 5.

A7. Если вы ничего не помните из раздела функции, то решайте задачу тупо в лоб – находите координаты точек и подставляйте в уравнение графика функции. Как только получите тождество – вы нашли правильную точку.

Для более продвинутых рекомендую нарисовать график функции. В нашем случае это будет парабола, которая опущена относительно начала координат на одну единицу.

Следовательно, точки, лежащие ниже $y = 1$, автоматически не будут решениями. Остается три точки, одна из которых (точка В) так же не подходит. Остается две точки. Теперь так же тупо подставляем их координаты в уравнение графика функции.

Ответ: 5.



A8. Найдем длину отрезка. Для этого из координаты конца отрезка вычтем координату начала. Получим

$$L = 10 - (-8) = 18.$$

Наш отрезок разбит на 6 частей. Следовательно, длина одной части будет равна

$$l = \frac{L}{6} = 3.$$

Теперь идем от точки 10 влево, отнимая каждый раз от ее значения 3. Получаем, что $e = 10 - 3 = 7$, $d = 7 - 3 = 4$, $c = 4 - 3 = 1$.

Ответ: 3.

A9. Вспомним основные свойства степеней.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{m \cdot n}, a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Теперь применим некоторые из них для решения данного примера

$$\frac{5^{-7}}{(0,6)^7 \cdot 3^{-8}} = \frac{1}{5^7 \cdot (0,6)^7 \cdot 3^{-8}} = \frac{1}{(5 \cdot 0,6)^7 \cdot 3^{-8}} = \frac{1}{3^7 \cdot 3^{-8}} = \frac{1}{3^{7-8}} = \frac{1}{3^{-1}} = 3^1 = 3$$

Ответ: 3.

A10. Вспомним основные правила решения неравенств.

1. Переносим все слагаемые из правой части неравенства в левую часть.
2. Приводим дроби к общему знаменателю. При этом перед приведением не забываем разложить на множители знаменатель каждой дроби (если это возможно)!!!
3. При решении неравенств всегда старайтесь, чтобы все выражения в неравенстве были вида $(x \pm a)$, а не $(a \pm x)$ и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками). Когда неравенство записано в таком виде **значение неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно и это облегчит решение!!!**
4. **НИКОГДА НЕ ДОМНОЖАЙТЕ (СОКРАЩАЙТЕ) НА ЗНАМЕНАТЕЛЬ, ЕСЛИ В НЕМ ЕСТЬ ПЕРЕМЕННАЯ!!!! ЕГО НУЖНО СОХРАНИТЬ ДО КОНЦА РЕШЕНИЯ!!!**

Перенесем все из правой части в левую и приведем дроби к общему знаменателю. Получим

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \frac{2-x}{2x} < 0$$

В числителе получили выражение $(2-x)$. Вынесем знак « $-$ » из скобок и потом домножим правую и левую части неравенства на -1 . **При этом не забываем поменять знак неравенства!!!**

$$\frac{2-x}{2x} < 0 \Rightarrow \frac{-(x-2)}{2x} < 0 \Rightarrow \frac{(x-2)}{2x} > 0.$$

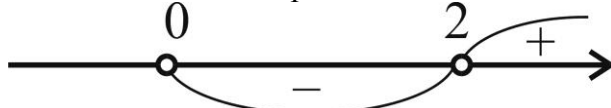
Нанесем нули числителя и знаменателя на координатную ось. Точки выкалываются, так как неравенство строгое.



При $x = +\infty$ значение выражение будет положительно



В точке $x = 2$ значение выражения поменяется на противоположное и станет отрицательным



В точке $x = 0$ значение выражения опять поменяется на противоположное и станет положительным



Так как последний вид неравенства $\frac{(x-2)}{2x} > 0$, то нас интересуют только положительные значения



Эти значения принадлежат двум промежуткам: $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$.

Ответ: 4.

A11. Пересечение графика с осью абсцисс (ось ОХ) происходит при $y = 0$. Найдем эту точку

$$y = -\frac{4}{3}x - 8 \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}x - 8 \Rightarrow x = -6.$$

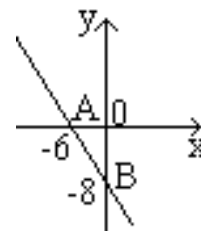
Координаты точки пересечения будут равны А (-6; 0).

Пересечение графика с осью ординат (ось ОУ) происходит при $x = 0$. Найдем эту точку

$$y = -\frac{4}{3}x - 8 = -\frac{4}{3} \cdot 0 - 8 = -8.$$

Координаты точки пересечения будут равны В (0; -8). Небольшой пояснительный рисунок облегчит решение. Очевидно, что надо применять теорему Пифагора

$$OA = 6, OB = 8 \Rightarrow AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$



Ответ: 1.

A12. Немного преобразуем функцию, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, которое гласит что

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Получаем

$$y = 1 - \cos^2 \frac{2\pi x}{3} = \sin^2 \frac{2\pi x}{3}$$

Значение синуса любого угла лежит в пределах от -1 до +1 включительно. В нашем случае мы имеем дело с квадратом синуса. Следовательно, его значение будет лежать в пределах от 0 до +1 включительно. Это и будет область значений функции.

Ответ: 4.

A13. Вспоминаем формулы сокращенного умножения и решаем тупо в лоб

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} : (x - 3) = \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 9} : \frac{(x - 3)}{1} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x + 3)} \cdot \frac{1}{(x - 3)} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x + 3)(x - 3)} = \frac{1}{x + 3}$$

Ответ: 2.

A14. Пусть первое число равно x , а второе y . Составим систему из двух уравнений и решим ее

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 323 \end{cases}$$

Выразим y из первого уравнения и подставим во второе. Получим

$$y = x - 2 \Rightarrow x(x - 2) = 323 \Rightarrow x^2 - 2x - 323 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 19, y_1 = 17, \quad x_2 = -17, y_2 = -19$$

У нас две пары чисел. В первой паре большее число 19, во второй -17.

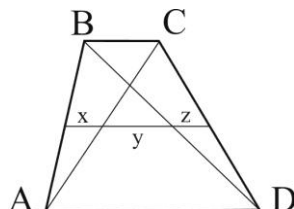
Теперь проанализируем наши уравнения. Уравнения 2 и 4 не имеют корней, так как в них отрицательный дискриминант (сожжете проверить самостоятельно). Остальные уравнения надо решить. Уравнение 5 не имеет корней 19 и -17. Уравнение 2 имеет корни -19 и 17. Уравнение 1 имеет корни 19 и -17. Следовательно, это и есть искомое уравнение.

Ответ: 1.

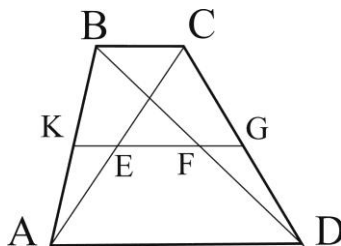
A15. Те, кто имел счастье начать изучать у меня геометрию, должны помнить эту задачу. Точнее свойство №3 из серии свойств трапеции.

Свойство 3. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Докажем это свойство. Проведем через середины диагоналей отрезок, параллельный основаниям, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции. Пусть диагонали трапеции разбивают его на три отрезка с длинами x, y, z .



В треугольнике ABC отрезок x является средней линией, а значит, его длина равна половине длины параллельной ему стороны треугольника $x = \frac{a}{2}$. Аналогичное рассуждение для треугольника ABD дает нам $x + y = \frac{b}{2}$. Тогда $y = \frac{b-a}{2}$. Применим это свойство для нашей трапеции.



$$\triangle BCD: FG - \text{средняя линия} \Rightarrow FG = \frac{BC}{2} = 1$$

$$\triangle ABC: KE - \text{средняя линия} \Rightarrow KE = \frac{BC}{2} = 1 \Rightarrow KG = 1 + 4 + 1 = 6$$

Ответ: 4.

A16. Перенесем все в левую сторону и вынесем общий множитель за скобки

$$9(2x-7) < 2\sqrt{22}(2x-7) \Rightarrow 9(2x-7) - 2\sqrt{22}(2x-7) < 0 \Rightarrow (2x-7)(9-2\sqrt{22}) < 0$$

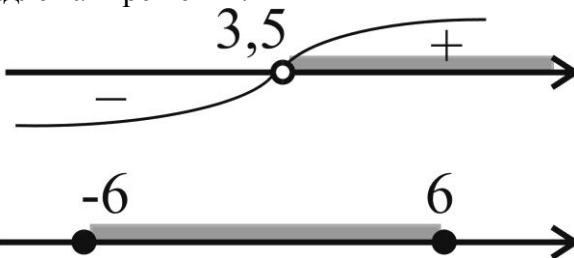
А теперь самое главное не облажаться тупо сократив на $(9-2\sqrt{22})$. Для начала выясним какой знак имеет это выражение. Для этого возведем в квадрат число 9 и число $2\sqrt{22}$. Получим

$$9^2 = 81, \quad (2\sqrt{22})^2 = 4 \cdot 22 = 88.$$

Вот теперь очевидно, что число $(9-2\sqrt{22})$ будет отрицательным. Поэтому **при сокращении на это число мы обязаны поменять знак неравенства на противоположный!!!** Получаем

$$(2x-7)(9-2\sqrt{22}) < 0 \Rightarrow (2x-7) > 0 \Rightarrow 2x-7 > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{2}$$

Изобразим это решение графически. Так же не забудем нарисовать под ним промежуток, которому (по условию задачи) должны принадлежать решения.



Целыми будут решения 4, 5 и 6. Их количество равно трем.

Ответ: 3.

A17. Не будем изобретать велосипед и решим данное уравнение тупо в лоб.

Сразу же запишем ОДЗ. Так как модуль любого выражения неотрицателен, то $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

1. Пусть подмодульное выражение **больше либо равно нулю**. Получим уравнение

$$x^2 - 4x - 2 = x - 2 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 0.$$

Проверим оба корня на выполнение условия раскрытия модуля. При $x_1 = 5$ подмодульное выражение будет положительным (корень подходит). Второй корень не подходит по ОДЗ.

2. Пусть подмодульное выражение **отрицательно**. Получим уравнение

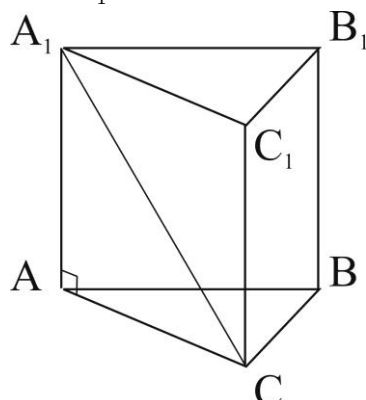
$$x^2 - 4x - 2 = -(x-2) \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -1.$$

Проверим оба корня на выполнение условия раскрытия модуля. При $x_1 = 4$ подмодульное выражение будет отрицательным. Второй корень не подходит по ОДЗ.

Таким образом, у нас два корня: 4 и 5. Их сумма равна 9.

Ответ: 5.

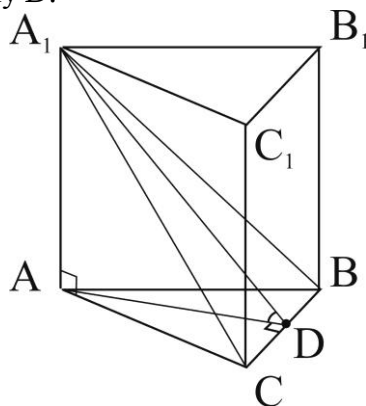
A18. Перед тем как начать решение вспомним, что такое правильная треугольная призма. Правильная треугольная призма – призма, в основаниях которой лежат два правильных (равносторонних) треугольника, а все боковые грани строго перпендикулярны этим основаниям. Пусть $A_1C = \sqrt{5}$, $AC = 2$ и нам надо найти $\angle A_1BCA$. Сделаем пояснительный рисунок



При помощи теоремы Пифагора найдем из треугольника AA_1C высоту призмы

$$AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{5 - 4} = 1.$$

На середине стороны CB возьмем точку D .



Рассмотрим равносторонний треугольник ABC .

$$AD \perp BC \Rightarrow A_1D \perp BC \Rightarrow \angle A_1DA = \angle A_1BCA$$

Опять применим теорему Пифагора. Теперь к треугольнику ADC , чтобы найти AD

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

Теперь из треугольник AA_1D найдем тангенс угла A_1DA . Получим

$$\operatorname{tg} \angle A_1DA = \frac{AA_1}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle A_1DA = 30^\circ$$

Ответ: 1.

B1. На мой взгляд в этой задаче допущено одна очень грубая неточность. Я практически сломал мозг решая ее, пока не заменил в условии слово «заплатила» на «доплатила». После этого решение заняло всего одну минуту.

Итак, проанализируем условие. Есть тарифный план. Сколько он стоит нам неизвестно. Нам известно только то, что если мы выговорим включенные минуты, то будем платить по 540 рублей за каждую последующую минуту. Лена превысила допустимую норму и **доплатила (да, именно доплатила; абонентскую плату она заплатила ранее, о чем нам почему-то в условии не сказали)** 43 200 рублей. Признаюсь честно, с самого начала решения данной задачи я считал, что 43 200 рублей это абонентская плата и плата за минуты, которые были использованы сверх нормы. При таких данных задача не имеет решения. Однако, как я говорил выше, меняем слово «заплатила» на «доплатила» и получаем, что 43 200 рублей это плата за лишние минуты. При этом стоимость одной лишней минуты равна 540 рублей. Получается, что Лена наговорила лишних

$$\frac{43\,200 \text{ рублей}}{540 \frac{\text{рублей}}{\text{минута}}} = 80 \text{ минут}.$$

Всего же в этот месяц Лена выговорила 580 минут. Следовательно, количество включенных минут было

равно

$$580 \text{ минут} - 80 \text{ минут} = 500 \text{ минут.}$$

Даша выговорила 490 минут и ей не придется ничего доплачивать.

Ответ: 0.

В2. Очевидно, что тут без замены не обойтись. Пусть $x^2 = t$. Тогда

$$t + 2\sqrt{t+17} = 18 \Rightarrow 2\sqrt{t+17} = 18 - t$$

Так как мы имеем дело с иррациональным уравнением, то не забываем про ОДЗ: $18 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 18$. Теперь возведем обе части в квадрат. И не забываем возвести в квадрат коэффициент, стоящий перед корнем!!! Получим

$$(2\sqrt{t+17})^2 = (18-t)^2 \Rightarrow 4(t+17) = 324 - 36t + t^2 \Rightarrow 4t + 68 - 324 + 36t - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 - 40t + 256 = 0$$

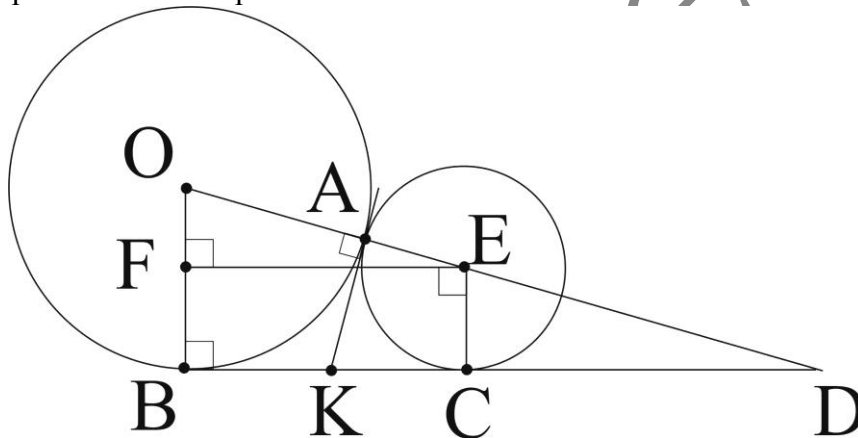
$$D = 24^2 \Rightarrow t_1 = \frac{40+24}{2} = 32, \quad t_2 = \frac{40-24}{2} = 8.$$

Первый корень не подходит по ОДЗ ($t \leq 18$). Второй корень подходит. Следовательно

$$x^2 = 8 \Rightarrow x_1 = \sqrt{8}, \quad x_2 = -\sqrt{8} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \sqrt{8} \cdot (-\sqrt{8}) = -8$$

Ответ: -8.

В3. Делаем подробный рисунок с небольшим дополнительным построением. На отрезке OB нанесем точку F так, чтобы отрезок FE был параллелен касательной BC .



Так как абсолютно непонятно как найти отрезок AK будем искать все подряд и надеяться, что рано или поздно найдем нужный нам отрезок. Для начала найдем очевидные длины отрезков

$$OF = OB - BF = 16 - 9 = 7$$

$$OE = OA + AE = 16 + 9 = 25$$

Из прямоугольного треугольника OFE при помощи теоремы Пифагора найдем FE

$$FE = \sqrt{OE^2 - OF^2} = \sqrt{625 - 49} = 24.$$

Так как треугольник OFE подобен треугольнику EDC (по трем углам), то

$$\frac{OF}{EC} = \frac{FE}{CD} \Rightarrow \frac{7}{9} = \frac{24}{CD} \Rightarrow CD = \frac{9 \cdot 24}{7} \quad \text{и} \quad \frac{OF}{EC} = \frac{OE}{ED} \Rightarrow \frac{7}{9} = \frac{25}{ED} \Rightarrow ED = \frac{9 \cdot 25}{7}.$$

Теперь мы можем найти длину отрезка AD

$$AD = AE + ED = 9 + \frac{9 \cdot 25}{7} = \frac{9 \cdot 32}{7}.$$

Треугольники AKD и EDC так же подобны, так как один угол у них общий (угол D), а еще два угла равны друг другу ($\angle KAD = \angle ECD = 90^\circ$). Откуда находим

$$\frac{AK}{AD} = \frac{EC}{CD} \Rightarrow AK = \frac{9 \cdot 32 \cdot 9 \cdot 7}{7 \cdot 9 \cdot 24} = 12$$

Ответ: 12.

В4. Это уравнение должны были решить все, кто прошел тему «Уравнения». Эта задача есть у меня в классной работе в теме 1.02 (пример № 9). Единственное отличие этого примера от того, что у меня в заданиях, так это знак перед свободным коэффициентом 1 в правой части уравнения.

Чтобы решить данное уравнение как обычно перенесем все слагаемые в левую часть

$$\frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2+7x-4} - \frac{6}{2x-1} - \frac{1}{1} = 0$$

При помощи корней раскладываем квадратичный трехчлен $2x^2 + 7x - 4$ на множители. Получим

$$2x^2 + 7x - 4 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+4) = (2x-1)(x+4)$$

Теперь приведем слагаемые уравнения к общему знаменателю

$$\frac{(2x-1)/}{x+4} + \frac{1/}{(2x-1)(x+4)} - \frac{(x+4)/}{2x-1} - \frac{(2x-1)(x+4)/}{1} = 0$$

Получаем

$$\frac{2x(2x-1) + 27 - 6(x+4) - 1(2x-1)(x+4)}{(x+4)(2x-1)} = 0$$

ОЧЕВИДНО, ЧТО ДРОБЬ БУДЕТ РАВНА НУЛЮ, ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ЧИСЛИТЕЛЬ РАВЕН НУЛЮ. Поэтому при дальнейшем решении мы можем забыть про знаменатель. Он нам нужен

лишь для того, чтобы записать ОДЗ: $x \neq -4$, $x \neq \frac{1}{2}$.

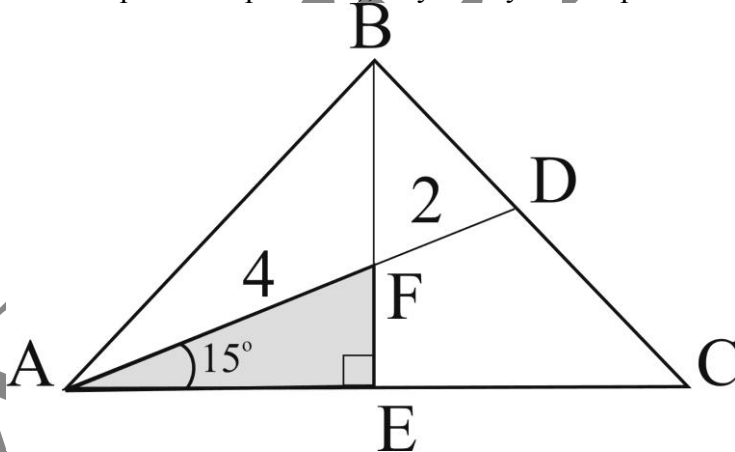
$$4x^2 - 2x + 27 - 6x - 24 - 2x^2 - 7x + 4 = 0$$

$$2x^2 - 15x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 7$$

Первый корень не принадлежит ОДЗ. Второй нам подходит.

Ответ: 7.

В5. Решение задачи начинаем с рисунка, на котором так же изобразим высоту (она же медиана и биссектриса, так как треугольник равнобедренный), опущенную из вершины B на основание AC .



Вспомним свойства медианы.

1. Точка пересечения медиан делит медиану на два отрезка – меньший отрезок равен $1/3$ длины медианы, а больший отрезок равен $2/3$ длины медианы.

В нашем случае медиана AD делится на два отрезка – 4 и 2.

2. Медианы делят треугольник на шесть треугольников одинаковой площади (один из таких треугольников выделен серым цветом на рисунке).

Таким образом, площадь нашего треугольника будет равна

$$S_{ABC} = 6 \cdot S_{AFE} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} AF \cdot AE \cdot \sin 15^\circ \right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AE \cdot \sin 15^\circ \right) = 12 \cdot AE \cdot \sin 15^\circ$$

Сторону AE будет равна

$$AE = AF \cdot \cos 15^\circ = 4 \cdot \cos 15^\circ.$$

Окончательно получаем

$$S_{ABC} = 12 \cdot 4 \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = 24 \cdot 2 \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = 24 \cdot \sin 30^\circ = 12$$

Ответ: 12.

В6. При решении задач на движение всегда переводите время из минут в часы

$$24 \text{ минуты} = \frac{24}{60} \text{ часа} = \frac{2}{5} \text{ часа}.$$

Пусть $\frac{80}{v}$ – время, которое мотоциклист потратил бы на путь 80 километров, двигаясь со скоростью v

(то есть с запланированной скоростью). Тогда $\frac{80}{v+10}$ – время, которое мотоциклист потратил на путь

80 километров, двигаясь со скоростью $v + 10$ (то есть со скоростью, большей на 10 км/ч).

Очевидно, что первое время больше второго на 24 минуты, на которые мотоциклист задержался у шлагбаума. Поэтому получаем

$$\frac{80}{v} - \frac{80}{v+10} = \frac{2}{5} \Rightarrow v^2 + 10v - 2000 = 0 \Rightarrow v_1 = 40, v_2 = -50.$$

Очевидно, что второй ответ посторонний.

Ответ: 40.

В7. На самом деле это достаточно простой пример. Простой при условии, что вы помните формулу понижения степени для косинуса, которую тут надо применить

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Итак, применяем тупо в лоб

$$2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}x \right) - 1 = 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right)}{2} \right) - 1 = 0 \Rightarrow 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) - 1 = 0 \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) = 0$$

Теперь вспоминаем о формулах приведения

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x \right) = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0$$

И получаем простое тригонометрическое уравнение, решением которого будут

$$3x = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi n}{3}$$

По условию наши решения должны принадлежать промежутку $\left[\frac{-2\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right]$, поэтому получаем неравенство

$$\frac{-2\pi}{3} \leq \frac{\pi n}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

Сокращаем каждый член неравенства на π

$$\frac{-2}{3} \leq \frac{n}{3} \leq \frac{1}{2}$$

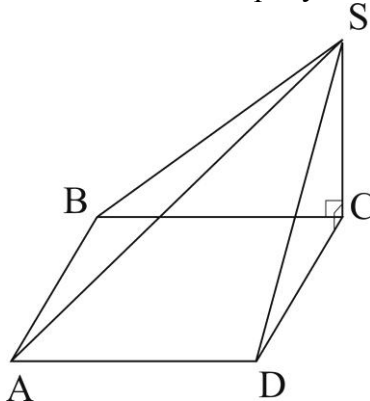
Домножаем на 3

$$3 \cdot \left(\frac{-2}{3} \right) \leq 3 \cdot \left(\frac{n}{3} \right) \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow -2 \leq n \leq 1,5$$

Откуда получаем, что нашему условию будут удовлетворять 4 решения, при $n = -2; -1; 0; +1$.

Ответ: 4.

В8. Как обычно с самого начала для наглядности делаем рисунок



По условию задачи $ABCD$ – квадрат, $\angle SDCB = \angle SCBD = 90^\circ$, $\angle SADC = \angle SABC = 60^\circ$, $AD = 3\sqrt{3}$.

По определению объем пирамиды равен

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SC.$$

Площадь основания найти не проблема. Надо найти высоту.

Вспомним теорему о трех перпендикулярах. Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна к наклонной. Применим ее для нашей пирамиды.

Так как $CD \perp AD \Rightarrow SD \perp AD$, то $\angle SDC = 60^\circ$. Так как $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$, то $\angle SBC = 60^\circ$.

Теперь из треугольника SDC найдем высоту пирамиды

$$\operatorname{tg} \angle SDC = \frac{SC}{DC} \Rightarrow SC = DC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$$

Ну а теперь вычислим объем

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SC = \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot 9 = 81$$

Ответ: 81.

В9. Опять несложный пример по тригонометрии. Для его решения необходимо знать формулу тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Тупо подставляем в эту формулу наши значения $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ и $\operatorname{tg} \beta = 7$ и произведем вычисления

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{4}{3} + 7}{1 - \frac{4}{3} \cdot 7} = \frac{25}{-25} = -1$$

По условию задачи $\begin{cases} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ 0^\circ < \beta < 90^\circ \end{cases}$. Следовательно,

$$0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 135^\circ$$

Ответ: 135.

В10. Вспомним метод выделения полного квадрата, который тут необходимо применить. Суть метода в том, чтобы увидеть формулу сокращенного умножения там, где ее на первый взгляд нет и быть не может.

Например, нас просят упростить выражение $\sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$. Выражение $7 - 2\sqrt{12}$ мы должны попытаться представить в виде квадрата двучлена, то есть в виде $(a - b)^2$. Вспомним, что $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. В нашем выражении есть слагаемое с коэффициентом 2. Следовательно, $\sqrt{12}$ есть не что иное, как ab . $\sqrt{12}$ можно представить как

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}.$$

Следовательно

$$a = 2, b = \sqrt{3}.$$

НО НЕ НАОБОРОТ, ТАК КАК a ДОЛЖНО БЫТЬ БОЛЬШЕ b !!! Помним о свойстве $\sqrt{a^2} = |a|$.

Таким образом, получаем

$$\sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{7-2 \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{4-2 \cdot 2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2)^2 - 2 \cdot (2\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$$

Для простоты восприятия сначала обработаем первый корень, потом второй и только после этого возведем сумму этих корней в квадрат.

Первый корень.

$$\begin{aligned} \sqrt{4+\sqrt{10-\sqrt{33+\sqrt{128}}}} &= \sqrt{4+\sqrt{10-\sqrt{33+2\sqrt{32}}}} = \sqrt{4+\sqrt{10-\sqrt{(\sqrt{32}+1)^2}}} = \sqrt{4+\sqrt{10-\sqrt{32}-1}} = \\ &= \sqrt{4+\sqrt{9-2\sqrt{8}}} = \sqrt{4+\sqrt{(\sqrt{8}-1)^2}} = \sqrt{4+\sqrt{8}-1} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

Второй корень.

$$\begin{aligned} \sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{33-\sqrt{128}}}} &= \sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{33-2\sqrt{32}}}} = \sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{(\sqrt{32}-1)^2}}} = \sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{32}-1}} = \\ &= \sqrt{4-\sqrt{9+2\sqrt{8}}} = \sqrt{4-\sqrt{(\sqrt{8}+1)^2}} = \sqrt{4-\sqrt{8}-1} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

Теперь складываем полученные выражения и возводим в квадрат. Получим

$$(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

Ответ: 8.

В11. В задачах на арифметические и геометрические прогрессии самое главное правильно записать условие. Само решение обычно не представляет трудностей, так как мы будем иметь дело с системой уравнений.

Немного теории для повторения.

Пусть у нас имеется последовательность чисел $-3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18$. Очевидно, что каждое последующее число больше предыдущего числа на 3 и дальше пойдут числа 21, 24, 27 и т.д.

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность вида

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$$

где d – разность прогрессии. У нас она равна 3. То есть каждое последующее число больше (если прогрессия возрастающая) или меньше (если прогрессия убывающая) предыдущего на величину d .

Разность прогрессии в общем случае находится как

$$d = a_2 - a_1 \text{ или } d = a_5 - a_4 \text{ или } d = a_n - a_{n-1}$$

или

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Если $d > 0$ – прогрессия возрастающая, $d < 0$ – прогрессия убывающая.

Каждому члену прогрессии соответствует свой номер

$$a_1 = -3, a_2 = 0, a_3 = 3 \text{ и т.д.}$$

n -й член арифметической прогрессии равен

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Например

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_7 = a_1 + (7-1)d = a_1 + 6d$$

Рассмотрим последовательность чисел 3, -6, 12, -24, 48 ...

Каждый последующий член получается умножением предыдущего на одно и то же число. Такая последовательность называется **геометрической прогрессией**.

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, для которой имеют место соотношения:

b_1 – заданное число, первый член прогрессии; $b_n = b_{n-1} q$ – n -й член прогрессии ($n \geq 2$);
 q – знаменатель прогрессии ($q \neq 1$).

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется бесконечно убывающей.

Формула n -го члена прогрессии

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Итак, у нас есть три числа, сумма которых равна 114. С одной стороны эти числа являются первым, четвертым и двадцатым членами арифметической прогрессии. То есть

$$a_1 + a_4 + a_{25} = 114 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 3d) + (a_1 + 24d) = 114 \Rightarrow 3a_1 + 27d = 114 \Rightarrow a_1 + 9d = 38$$

С другой стороны они являются тремя последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии. У любой геометрической прогрессии есть одно важное свойство. Если три числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию в указанном порядке, то

$$y^2 = zx$$

Воспользуемся этим свойством для нашего примера.

$$(b_2)^2 = b_1 \cdot b_3 \Rightarrow (a_1 + 3d)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 24d) \Rightarrow a_1^2 + 6a_1d + 9d^2 = a_1^2 + 24a_1d \Rightarrow 9d^2 - 18a_1d = 0 \Rightarrow 9d(d - 2a_1) = 0 \Rightarrow d - 2a_1 = 0 \Rightarrow d = 2a_1$$

Таким образом, мы получили два уравнения с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 + 9d = 38 \\ d = 2a_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 + 9(2a_1) = 38 \Rightarrow a_1 + 18a_1 = 38 \Rightarrow 19a_1 = 38 \Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow d = 4$$

Большее из чисел, это третье число, которое является 25-м членом арифметической прогрессии.

$$a_{25} = a_1 + 24d = 2 + 96 = 98$$

Ответ: 98.

В12. Перепишем неравенство в немного другом виде

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot (8 - x) + (8)^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \leq 0$$

Я думаю многие обратили внимание на то, что нам не хватает x^2 , чтобы получить квадрат разности выражения $(8 - x)$. Поэтому прибавим и отнимем x^2 . Получим

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot (8 - x) + (8)^2 - 2 \cdot 8 \cdot x + x^2 - x^2 \leq 0$$

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot (8 - x) + (8 - x)^2 - x^2 \leq 0$$

А теперь опять надо увидеть формулу сокращенного произведения и опять это будет квадрат разности

$$(2^x - (8 - x))^2 - x^2 \leq 0$$

И снова нам надо быть внимательными и увидеть разность квадратов

$$(2^x - (8 - x) - x)(2^x - (8 - x) + x) \leq 0$$

$$(2^x - 8)(2^x - 8 + 2x) \leq 0$$

Есть и другой способ, который поможет нам точно так же преобразовать неравенство. Временно заменяем знак неравенства на знак равно

$$(2^x)^2 - 2^x \cdot 2 \cdot (8 - x) + 64 - 16x = 0$$

и пытаемся увидеть в этой записи квадратичный трехчлен

$$ax^2 + bx + c = 0$$

который, при помощи корней, мы можем разложить на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения. Посчитаем дискриминант

$$D = (2 \cdot (8 - x))^2 - 4 \cdot (64 - 16x) = 4 \cdot (64 - 16x + x^2) - 256 + 64x = 256 - 64x + 4x^2 - 256 + 64x = 4x^2$$

Теперь найдем корни

$$x_{1,2} = \frac{2(8-x) \pm 2x}{2} = \frac{16-2x \pm 2x}{2} = \frac{16-2x+2x}{2} = 8$$

$$\frac{16-2x-2x}{2} = 8-2x$$

Окончательно получаем

$$(2^x)^2 - 2^x \cdot 2 \cdot (8 - x) + 64 - 16x = (2^x - 8)(2^x - (8 - 2^x)) = (2^x - 8)(2^x - 8 + 2x) = 0$$

А теперь заменяем знак равно на знак неравенства и получаем аналогичное неравенство, как и при первом способе преобразований

$$(2^x - 8)(2^x - 8 + 2x) \leq 0$$

Какой способ выбрать? Тот, который Вам более понятен.

Сейчас найдем нули выражений в скобках. С первой скобкой все просто

$$2^x - 8 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Со второй скобкой чуть сложнее

$$2^x - 8 + 2x = 0 \Rightarrow 2^x + 2x = 8$$

Тупо подберем корень. Легко убедиться, что равенство будет при $x = 2$.

Составим небольшую табличку, в которой укажем знаки выражений на числовых промежутках, которые получились разбиением числовой оси нулями наших выражений.

	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$2^x - 8$	-	-	+	+
$2^x - 8 + 2x$	-	+	+	+

Небольшой анализ данных таблицы. На промежутке $(-\infty; 2)$ оба выражения отрицательны. Следовательно, их произведение положительно и на данном интервале решений не будет.

На промежутке $[2; 3]$ первое выражение все еще отрицательно, а второе становится положительным. Следовательно, их произведение будет отрицательно и неравенство будет выполняться.

На промежутке $(3; +\infty)$ оба выражения отрицательны. Следовательно, их произведение снова положительно и на данном интервале решений не будет.

Нас просят найти сумму целых решений. Таким образом, только числа 2 и 3 будут являться целыми решениями данного неравенства. Их сумма равна 5.

Ответ: 5.