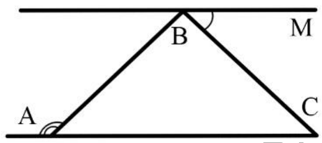
В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории.
Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.
Если у вас есть более красивые решения отдельных задач – поделитесь! ☺
2019/2020, 1 этап, первый вариант

А1. Пусть $a = 0$. Подставьте это значение a в условие и посмотрите какие из вариантов ответов получатся четными. **Ответ:** 5.



А2. Расположите рисунок так, чтобы основание АС треугольника стало горизонтальным. Так будет гораздо проще воспринимать задачу и найти правильное решение. Так как внешний угол при вершине А равен 137 градусов, то угол $BAC = 180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$. Так как треугольник АВС равнобедренный, то $\angle BAC = \angle BCA = 43^\circ$. А дальше вспоминаем свойство, согласно которому углы МВС и ВСА равны как накрест лежащие при параллельных прямых. **Ответ:** 4.

А3. Можно проверять каждое из неравенств, а можно вместо b подставить 2, а вместо a подставить 1 и проверить какое из неравенств будет справедливым. **Ответ:** 1.

А4. Прямая l лежит в плоскости ABB_1A_1. Прямая B_1C_1 пересекает плоскость ABB_1A_1 в точке B_1 и не пересекается с прямой l. Прямая A_1D_1 пересекает плоскость ABB_1A_1 в точке A_1 и не пересекается с прямой l. А вот прямая АВ лежит в плоскости ABB_1A_1 и не является параллельной прямой l. Следовательно, именно она пересекается с прямой l. **Ответ:** 3.

А5. Мы знаем, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90 градусов. Пусть меньший угол прямоугольного треугольника равен $2x$, а больший $3x$. Тогда $2x + 3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{5}$.

Ответ: 1.

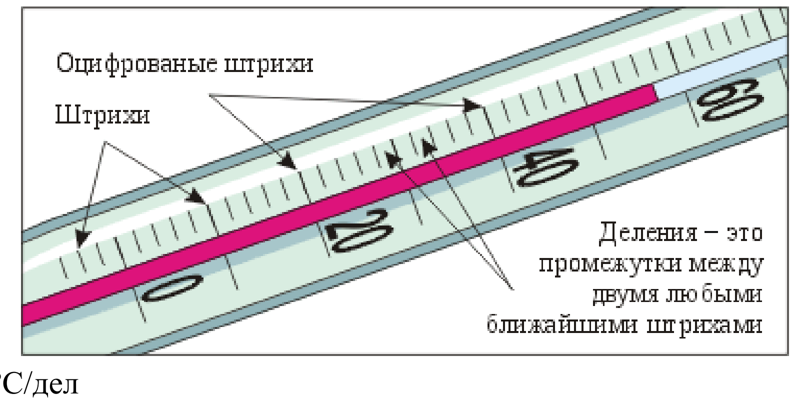
А6. Так как $a^x b^x = (ab)^x$, то

$$\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}\sqrt[3]{12+\sqrt{19}} = \sqrt[3]{\left(12-\sqrt{19}\right)\left(12+\sqrt{19}\right)} = \sqrt[3]{12^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2} = \sqrt[3]{125} = 5.$$ **Ответ:** 3.

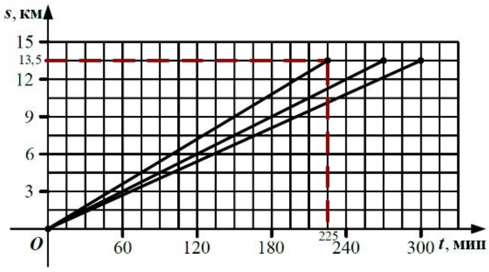
А7. Проверим каждое из утверждений.
1. Выразив из уравнения y мы получим $y = 4x^2$, то есть квадратичную функцию. Не верно.
2. А вот тут надо узнать уравнение, которым задается окружность. И именно это утверждение будет верным. Не помните уравнение окружности – погуглите.
3. Выразив y мы получим уравнение прямой. Не верно.
4. Выразив y мы получим уравнение гиперболы. Не верно.
5. Выразив y мы получим уравнение кубической функции. Не верно. **Ответ:** 2.

А8. Чтобы решить эту задачу надо знать что такое цена деления и как ее находить. Цена делений шкалы измерительного прибора – важная характеристика каждого шкального прибора. Сформулируем обобщённое правило для её вычисления.

Чтобы подсчитать цену делений шкалы, нужно: а) выбрать на шкале два ближайших оцифрованных штриха; б) сосчитать количество делений между ними; в) разность значений около выбранных штрихов разделить на количество делений.



Закрепим правило вычисления цены делений (см. рисунок).
а) выбираем оцифрованные штрихи: 20 °C и 40 °C
б) считаем: между ними 10 делений (промежутков)
в) вычисляем: (40 °C – 20 °C) / 10 делений = 2 °C/дел

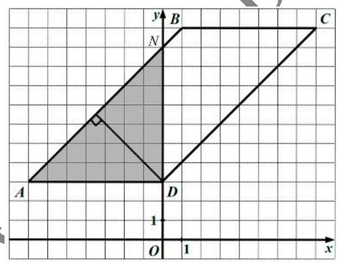


Ответ: цена делений = 2 °С/дел. Теперь вернемся к задаче.

Все пешеходы прошли одинаковый путь в 13,5 километров. Очевидно, что большой скоростью обладает тот пешеход, который потратил на это наименьшее время. Скорость этого пешехода будет равна

$$\upsilon=\frac{l}{t}=\frac{13{,}5\ \text{км}}{225\ \text{минут}}=\frac{13500\ \text{м}}{225\ \text{минут}}=60\ \text{м/мин}.$$ **Ответ:** 1.

А9. Меньшая высота параллелограмма будет опущена на большую сторону. Из вершины D опустим высоту на сторону AB. Заметим, что эта высота так же является высотой прямоугольного треугольника AND (закрашен серым). Найдем чему равны катеты этого прямоугольного треугольника. Сторона катет AD содержит 7 клеточек. Катет ND содержит так же 7 клеточек. Следовательно, треугольник AND является равнобедренным и высотка, проведенная к гипотенузе, так же будет являться медианой и биссектрисой. А мы знаем, что медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. ПО теореме Пифагора найдем гипотенузу



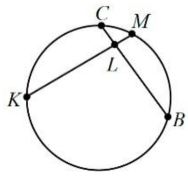
$$AN=\sqrt{AD^2+ND^2}=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}\ \Rightarrow\ h=\frac{AN}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: 4.

А10. Вспомним **теорему Виета:** если квадратный трехчлен $ax^2+bx+c=0$ имеет корни, то справедливы следующие соотношения: $x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}$. Верно и обратное утверждение: если числа x_1 и x_2 удовлетворяют равенствам: $x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. По условию задачи $\frac{x_1}{x_2}=\frac{7}{4}\ \Rightarrow\ x_1=x_2\frac{7}{4}$. Следовательно,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ \Rightarrow\ x_2\frac{7}{4}+x_2=-\frac{-22}{1}\ \Rightarrow\ x_2=8\ \Rightarrow\ x_1=x_2\frac{7}{4}=8\cdot\frac{7}{4}=14$$

Ответ: 3.



А11. Вспоминаем теорему об отрезках пересекающихся хорд $BL\cdot LC=KL\cdot LM$. Пусть LC = x. Так как $BL:LC=5:1$, то BL = $5x$. Следовательно,

$$BL\cdot LC=KL\cdot LM.\ \Rightarrow\ 5x\cdot x=7{,}2\cdot 1{,}21$$

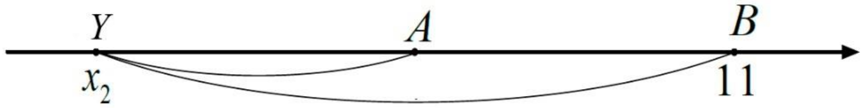
Ни в коем случае не спешим вычислять $7{,}2\cdot 1{,}21$. Внимательно следите за вычислениями

$$5x\cdot x=7{,}2\cdot 1{,}21\ \Rightarrow\ x=\sqrt{\frac{7{,}2\cdot 1{,}21}{5}}=\sqrt{\frac{7{,}2}{5}\cdot 1{,}21}=\sqrt{1{,}44\cdot 1{,}21}=\sqrt{\frac{144}{100}\cdot\frac{121}{100}}=\frac{12}{10}\cdot\frac{11}{10}=\frac{132}{100}=1{,}32$$

Ответ: 5.

А12. Возможны два случая расположения точек искомых точек: между точками A и B и слева от точки A. Рассмотрим первый случай.

Пусть AX = a. Тогда по условию задачи XB = $2a$. Из этого следует, что AB = $3a$. С другой стороны, расстояние между точками A и B равно разности их координат или 18. Следовательно, a = 6 и координата точки X равна x_1 = –1. Рассмотрим второй случай.



Пусть AY = b. Тогда по условию задачи YB = $2b$. Из этого следует, что AB = b. С другой стороны, расстояние между точками A и B равно 18. Следовательно, b = 18 и координата точки Y равна x_2 = –25. Сумма координат точек X и Y равна –26. **Ответ:** 2.

А13. Для начала воспользуемся формулами приведения

$$\mathrm{tg}\frac{13\pi}{12}=\mathrm{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}.$$

А теперь вспомним формулу половинного угла для тангенса $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$ и применим ее

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}}}{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}}{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}}{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}}$$

Это не очень приятно вычислять, но не так сложно, как может показаться

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)/\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)}}{\sqrt{3}-\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)/\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}}$$

Домножим на сопряженное

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}}{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}-2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}:\frac{2\sqrt{3}-2}{1}=\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}-2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: 4.

А14. Возведем каждое из чисел в квадрат. Получим

$$14^2=196,\quad \left(3\sqrt{19}\right)^2=3^2\left(\sqrt{19}\right)^2=9\cdot 19=171,\quad \left(6\sqrt{5}+1\right)^2=\left(6\sqrt{5}\right)^2+2\cdot 6\sqrt{5}\cdot 1+1=181+12\sqrt{5}$$

Очевидно, что $3\sqrt{19}$ будет наименьшим. Осталось сравнить 196 и $181+12\sqrt{5}$. Для того, чтобы выяснить какое из этих чисел больше, найдем их разность

$$196-\left(181+12\sqrt{5}\right)=15-12\sqrt{5}.$$

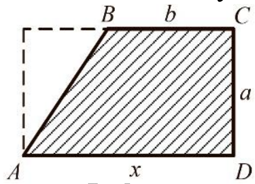
Так как квадратный корень из пяти больше двух, то очевидно, что разность отрицательна и $181+12\sqrt{5}$ больше чем 196. Дальше сами. **Ответ:** 1.

А15. Проверим каждое из утверждений.

1. Утверждение неверное, так как $x^2+36=0 \;\Rightarrow\; x^2=-36$, а такого быть не может, так как $x^2\geq 0$.
2. Утверждение неверное. Для того, чтобы в этом убедиться, подставьте $x=7$ и $x=-7$. При таких значениях x мы не получим тождество.
3. Утверждение верное. Прологарифмируем правую и левую часть по основанию 6. Получим
$$6^x=7 \;\Rightarrow\; \log_6 6^x=\log_6 7 \;\Rightarrow\; x\cdot\log_6 6=\log_6 7 \;\Rightarrow\; x=\log_6 7 \text{ (помним, что } \log_a a=1).$$
4. Утверждение верное. Числа называются взаимообратными если их произведение равно 1. По теореме

Виета $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{8} = 1$. Только перед применением теоремы Виета надо обязательно убедиться, что дискриминант строго больше 0.
5. Утверждение верное, так как оба уравнения имеют одинаковые корни 8 и –8.
Ответ: 5.

А16. Пусть AD=*x*. Периметр прямоугольника будет равен $P = 2(AD + CD) = 2(x + a)$. По условию задачи мы знаем площадь трапеции. По определению она равна полусумме оснований умноженной на высоту



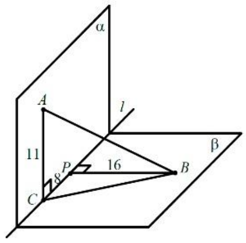
$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CD = \frac{x + b}{2} \cdot a \;\Rightarrow\; x + b = \frac{2S}{a} \;\Rightarrow\; x = \frac{2S}{a} - b$$

Окончательно получим

$$P = 2(x + a) = 2\left(\frac{2S}{a} - b + a\right) = 2\left(\frac{2S - ab + a^2}{a}\right).$$ **Ответ:** 3.

А17. Качаем по ссылке https://uchebniki.by/rus/skachat/id01438s учебник по математике для 8–го класса и открываем его на странице 140. Вам придется самостоятельно изучить материал, изложенный на страницах 140–152.
Так как вершина параболы смещена «*вдоль оси OX на 4 единицы влево и вдоль оси OY на 9 единиц вниз*», то $y = -3(x - m)^2 + n = -3(x - (-4))^2 - 9 = -3(x + 4)^2 - 9 = -3(x^2 + 8x + 16) - 9 = -3x^2 - 24x - 57$. **Ответ:** 2.

А18. Достаточно простая задача. Треугольники ABC и BPC будут прямоугольными (внимательно читайте условие). По теореме Пифагора для треугольника ABC



$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$$

Катет CB найдем по теореме Пифагора для треугольника BPC, в котором он является гипотенузой $CB^2 = BP^2 + PC^2 = 16^2 + 8^2 = 256 + 64 = 320$. Окончательно получим

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{320 + 121} = \sqrt{441} = 21.$$ **Ответ:** 5.

А19. Достаточно простое тригонометрическое уравнение. Немного преобразуем его, воспользовавшись формулами приведения

$$2\sin(270^\circ + 3x) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \sin(270^\circ + 3x) = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -\cos(3x) = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \cos(3x) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\begin{matrix} 3x_1 = 60^\circ + 360^\circ N \\ 3x_2 = -60^\circ + 360^\circ N \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x_1 = 20^\circ + 120^\circ N \\ x_2 = -20^\circ + 120^\circ N \end{matrix}$$

Найдем корни, принадлежащие промежутку, данному в условии. Сначала для первого корня

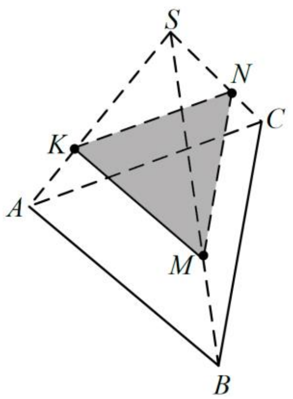
$$-30^\circ \le 20^\circ + 120^\circ N \le 120^\circ \;\Rightarrow\; -50^\circ \le 120^\circ N \le 100^\circ \;\Rightarrow\; -\frac{50^\circ}{120^\circ} \le N \le \frac{100^\circ}{120^\circ} \;\Rightarrow\; N = 0 \;\Rightarrow\; x = 20^\circ$$

И для второго корня

$$-30^\circ \le -20^\circ + 120^\circ N \le 120^\circ \;\Rightarrow\; -10^\circ \le 120^\circ N \le 140^\circ \;\Rightarrow\; -\frac{10^\circ}{120^\circ} \le N \le \frac{140^\circ}{120^\circ} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} N = 0 \\ N = 1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x = -20^\circ \\ x = 100^\circ \end{matrix}$$

Получили три корня. В ответе указываем сумму корней. **Ответ:** 2.

А20. В этой задаче хитрое условие, которое может вас запутать. Что в нем не так? Дело в том, что по условию SK=SN=SM, но к этому надо прийти. Как? Внимательно читаем условие. По условию SK:SA=2:3. Пусть SA=3*x*. Тогда SK=2*x* и KA=*x*. Получаем, что SK:KA=2:1. К аналогичному выводу мы можем прийти, если рассмотрим отношение SC к SN. Таким образом получаем, что SK=SN=SM=$\frac{2}{3}a$, где *a* – ребро пирамиды. Следовательно, треугольник SKM подобен треугольнику SAB с коэффициентом подобия 2/3. Рассматривая две другие грани получаем, что



треугольник SMN подобен треугольнику SBC и треугольник SNK подобен треугольнику SAC. При этом коэффициент подобия такой же. Следовательно, треугольник KMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия 2/3. Отношение площадей треугольников будет равно квадрату коэффициента подобия. Окончательно получим

$$\frac{S_{KMN}}{S_{ABC}}=k^2 \quad\Rightarrow\quad S_{KMN}=k^2S_{ABC}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{9}=\frac{\left(2\sqrt{6}\right)^2\sqrt{3}}{9}=\frac{24\sqrt{3}}{9}=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$ **Ответ:** 4.

Часть В

В1. Решаем по порядку.

1. В общем виде формула n–го члена арифметической прогрессии имеет следующий вид

$$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+nd-d\ ,$$

то есть разность прогрессии равна коэффициенту перед n. В нашем случае это –2.

2. С одной стороны можно решить неравенство $5-2n<0$ и найти номер этого члена. Если решать таким способом, то $5<2n \Rightarrow n>2{,}5$ и так как n может быть только целым числом, то n = 3.

С другой стороны, можно быстро подставить n = 1, 2, 3… в формулу $a_n=5-2n$ и посмотреть при каком n члены арифметической прогрессии станут отрицательными.

3. Подставим $a_n=-27$ и найдем номер этого члена прогрессии

$$a_n=5-2n \Rightarrow -27=5-2n \Rightarrow 2n=32 \Rightarrow n=16$$

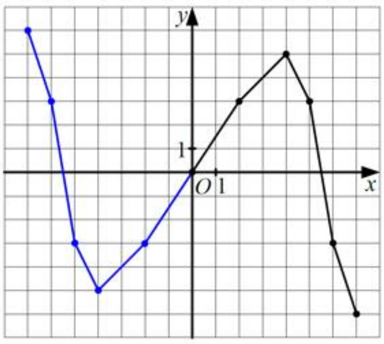
4. Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Первый член прогрессии $a_1=5-2\cdot1=3$, пятый $a_5=5-2\cdot5=-5$. Сумма первых пяти членов равна

$$S_5=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot5=\frac{3-5}{2}\cdot5=-5$$

Ответ: А4Б3В6Г2.



В2. Нечетной называется функция, для которой $f(-x)=-f(x)$. Такая функция будет всегда симметрична относительно начала координат. Изобразим схематически график этой функции для $x\in[-7;0]$ и проверим каждое из утверждений.

1. Смотрим на график функции. Утверждение верное.

2. Читаем первый абзац в решении этой задачи и параллельно смотрим на график функции. Утверждение не верное.

3. Можно попытаться ответить на этот вопрос при помощи графика, а можно воспользоваться свойством $f(-x)=-f(x)$. Попробуем второй вариант. И графика (который дан в условии задачи) видно, что $f(5)=f(3)$. Так как функция нечетная, то $f(-5)=-f(5)=-3$. Утверждение верное.

4. Первый способ решения. Смотрим на график. Второй способ. Так же можно было догадаться, что так как функция нечетная и симметрична относительно начала координат, то максимальное значение функции при x>0 будет по модулю равно минимальному значению функции, при x<0. И наоборот, минимальное значение функции при x>0 будет по модулю равно максимальному значению функции, при x<0. При x>0 минимальное значение равно –6 при x = 7. Утверждение не верное.

5. Смотрим на график. Хотя для решения мы могли воспользоваться рассуждениями из пункта 4. Утверждение верное.

6. В пункте 3 мы выяснили, что $f(-5)=-f(5)=-3$. При этом из графика видно, что $f(3)=4$. Утверждение не верное. **Ответ:** 135.

В3. Пусть в первой коробке x конфет, а во второй y конфет. Если из первой коробки переложить во вторую 10 конфет, то в первой коробке станет $(x-10)$ конфет, а во второй $(y+10)$ конфет. По условию задачи после этого «*в первой коробке их останется в три раза меньше, чем станет во второй*», то есть

$$x-10=\frac{y+10}{3}$$

Так же мы знаем, что общее число конфет равно 64, то есть $x+y=64$. Мы получили систему уравнений с двумя неизвестными. Решим ее методом подстановки

$$\begin{cases} x-10=\dfrac{y+10}{3} \\ x+y=64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x-10)=y+10 \\ y=64-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x-10)=64-x+10 \\ y=64-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=26 \\ y=64-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=26 \\ y=38 \end{cases}$$

Мы получили, что в первой коробке было на 12 конфет меньше, чем во второй. А теперь найдем «*на сколько процентов p конфет было меньше в первой коробке, чем во второй*»

$$\begin{matrix} p\,\% - 12 \text{ конфет} \\ 100\% - 38 \text{ конфет} \end{matrix} \Rightarrow p=\frac{12\cdot 100\%}{38}$$

И не забываем умножить ответ на 19. **Ответ:** 600.

B4. Нам предлагают решить достаточно простое иррациональное уравнение. Что делать, если квадратный корень равен положительному числу? Возвести обе части уравнения во вторую степень. Получим

$$\sqrt{\sqrt{x^4-18x-29}+x}=3 \Rightarrow \left(\sqrt{\sqrt{x^4-18x-29}+x}\right)^2=3^2 \Rightarrow \sqrt{x^4-18x-29}+x=9$$

После этого корень оставляем на месте, а все слагаемые переносим в правую часть

$$\sqrt{x^4-18x-29}+x=9 \Rightarrow \sqrt{x^4-18x-29}=9-x$$

Сейчас надо не забыть записать ОДЗ: $9-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 9$. Что делать дальше? Опять возводим во вторую степень, чтобы избавиться от квадратного корня

$$\left(\sqrt{x^4-18x-29}\right)^2=(9-x)^2 \Rightarrow x^4-18x-29=81-18x+x^2 \Rightarrow x^4-x^2-110=0$$

Мы получили простое биквадратное уравнение. Пусть $x^2=t$. Получим

$$t^2-t-110=0 \Rightarrow \begin{matrix} t_1=-10 \\ t_2=11 \end{matrix}$$

Очевидно, что первый корень посторонний. Сделаем обратную замену и найдем произведение корней уравнения

$$x^2=11 \Rightarrow x_1=\sqrt{11},\quad x_2=-\sqrt{11} \Rightarrow x_1\cdot x_2=-\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}=-11.$$ **Ответ:** –11.

B5. Так как окружность содержит 360°, то многоугольник будет содержать $\frac{360^\circ}{30^\circ}=12$ сторон и его периметр будет равен 12·7=84. **Ответ:** 84.

B6. Под корнем четной степени может находиться только неотрицательно выражение, то есть

$$\frac{7-6x-x^2}{(x+5)^2}\geq 0$$

Для решения этого неравенства понадобиться метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории, которая обязательна к изучению.

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.

Поняли что–нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $(6-x)(x+3)\leq 0$

При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида ($x \pm a$), а не ($a \pm x$) и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже. У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем –1 из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3)\leq 0$$

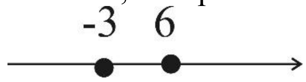
Сокращая на –1 не забываем поменять знак неравенства на противоположный

$$(x-6)(x+3)\geq 0$$

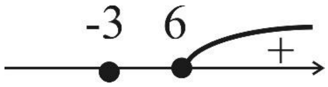
Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступать к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

$$x-6=0 \Rightarrow x=6 \text{ и } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.

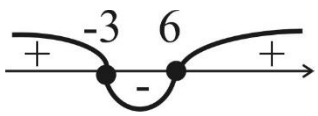


Если все множители неравенства записаны в виде($x \pm a$) и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!! Не верите? Можем проверить. Пусть x=7, тогда $(x–6)(x+3) = (7–6)(7+3)=1\cdot10=10>0 \Rightarrow$ выражение положительно



А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства уникален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный

В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства «≥», то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка: $(-\infty; -3]$ и $[6; +\infty)$.

И еще один пример.

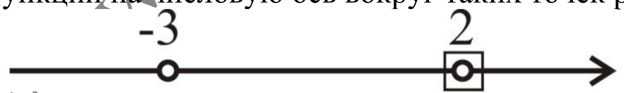
ПРИМЕР: *Найдите наибольшее целое решение неравенства* $(x-2)(x^2+x-6)<0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x_1=-3, x_2=2 \Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

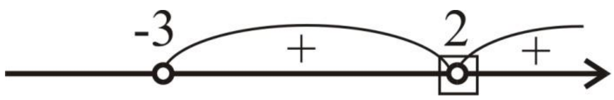
Перепишем неравенство в новом виде: $(x-2)(x-2)(x+3)<0 \Rightarrow (x-2)^2(x+3)<0$

При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.

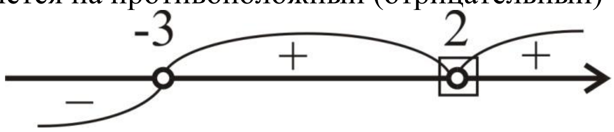


Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно

При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение (x – 2) возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!

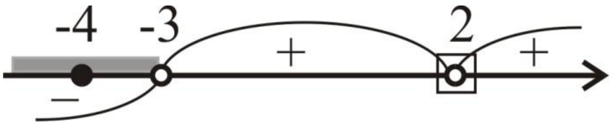


В точке –3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой

Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до –3 (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число –4.



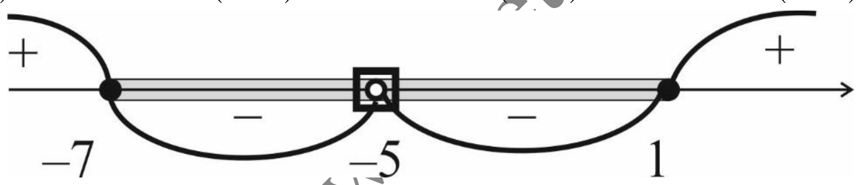
Ответ: –4.

При решении неравенств:

1. Всегда переносите все слагаемые в левую часть (за исключением линейных неравенств).
2. Приводите дроби к общему знаменателю (вспоминайте тему уравнения).
3. Если в числителе и в знаменателе получившихся дробей есть квадратичные трехчлены – раскладывайте их на множители.
4. Все выражения в неравенстве представляйте в виде $(x \pm a)$, а не $(a \pm x)$.
5. Не забывайте менять знак неравенства при умножении/делении правой и левой части неравенства на отрицательно число.
6. Всегда делайте пояснительный рисунок!!!
7. Когда вы ищите нули числителя или знаменателя, вы решаете уравнение, а не неравенство. Знак неравенства пишется только один раз и только в самом неравенстве. Нули числителя, не совпадающие с нулями знаменателя, отмечайте на числовой оси **точками** (если неравенство нестрогое; если строгое – кружочками), а нули знаменателя – только **кружочками** (на ноль делить нельзя).
8. Всегда рисуйте змейку. Когда змейка выше оси – знак неравенства положительный, ниже оси – знак неравенства отрицательный.
9. Не забывайте отражать змейку, если выражение с нулевой точкой находится в четной степени.

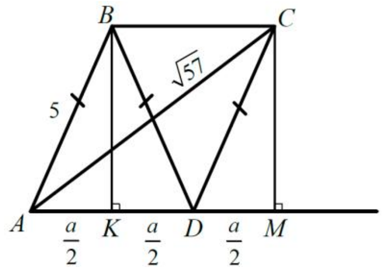
А теперь вернемся к нашему неравенству. В целом у нас не так все страшно. Надо только преобразовать числитель. Во–первых, надо «выплюнуть» минус и не забыть поменять знак неравенства на противоположный. Во–вторых, разложить на множители при помощи корней квадратичного трехчлена

$$\frac{7-6x-x^2}{(x+5)^2} \ge 0 \;\Rightarrow\; \frac{-(x^2+6x-7)}{(x+5)^2} \ge 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2+6x-7}{(x+5)^2} \le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x+7)(x-1)}{(x+5)^2} \le 0$$



Решение неравенства $[-7;-5)\cup(-5;1]$. Этому промежутку принадлежат целые числа –7, –6, –4, –3, –2, –1, 0 и 1. Их сумма равна –22. **Ответ:** –22.

B7. Опустим из вершин B и C высоты BK = CM =h на основание AD. Пусть AD = a. Так как треугольник ABD равнобедренный, то AK = KD = DM= 0,5a. Запишем теоремы Пифагора для треугольников ABK и ACM. Получим



$$\begin{cases} AB^2 = AK^2 + BK^2 \\ AC^2 = AM^2 + CM^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^2 = (0,5a)^2 + h^2 \\ \left(\sqrt{57}\right)^2 = (1,5a)^2 + h^2 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе

$$25-57 = (0,5a)^2 + h^2 - (1,5a)^2 - h^2 \;\Rightarrow\; -32 = 0,25a^2 - 2,25a^2 \;\Rightarrow\; 2a^2 = 32 \;\Rightarrow\; a = 4$$

Из теоремы Пифагора для треугольника ABK найдем высоту параллелограмма h

$$5^2 = (0,5a)^2 + h^2 \;\Rightarrow\; 25-4 = h^2 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{21}$$

Площадь параллелограмма равна произведению основания параллелограмма на его высоту

$$S = AD \cdot BK = 4 \cdot \sqrt{21}$$

Вспоминаем, что в ответ надо записать квадрат этой величины. **Ответ:** 336.

B8. Это задача на арифметическую прогрессию. Для начала найдем первое число, которое при делении на 5 дает в остатке 3 и при этом это число должно быть больше 10. Как это сделать? Умножаем 5 на 2 и прибавляем 3. Получаем 13. Это и есть наше первое число. При этом равность прогрессии будет равна 5 и всего в прогрессии будет 100 членов. n–й член арифметической прогрессии равен

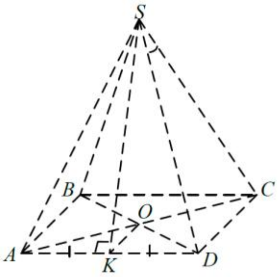
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

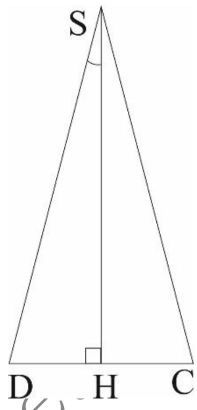
Подставляем наши данные и находим сотый член прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 13 + (100-1)\cdot 5 = 508$$

Сумма первых 100 членов будет равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \;\Rightarrow\; S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2}\cdot 100 = (13+508)\cdot 50 = 26050.$$ **Ответ:** 26050.





B9. Так как в основании пирамиды лежит квадрат, то длина стороны квадрата будет равна 5 (если не можете сообразить почему 5, то запишите теорему Пифагора для треугольника ACD).
Площадь боковой поверхности пирамиды будет равна площади одной из граней увеличенной в 4 раза.
Рассмотрим грань SDC. Треугольник SDC равнобедренный. Его площадь равна $S_{SDC} = \frac{1}{2} DC \cdot SH = \frac{5}{2} SH$.

По условию задачи мы знаем, что угол DSC равен $2\operatorname{arctg}\frac{5}{8}$. Значит угол DSH будет равен $\operatorname{arctg}\frac{5}{8}$, ведь высота SH в равнобедренном треугольнике будет еще и медианой и биссектрисой. Тангенс угла DSH в прямоугольном треугольнике DSH будет равен

$$\operatorname{tg}(\angle DSH) = \frac{DH}{SH} \;\Rightarrow\; SH = \frac{DH}{\operatorname{tg}(\angle DSH)} = \frac{2,5}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{8}\right)} = \frac{2,5}{\frac{5}{8}} = 4$$

Следовательно, площадь треугольника SDC будет равна $S_{SDC} = \frac{5}{2} SH = \frac{5}{2}\cdot 4 = 10$, а площадь боковой поверхности пирамиды будет равна 40. **Ответ:** 40.

B10. С одной стороны, это уравнение можно решить раскрыв модуль по определению. Однако при таком методе решения мы получим два дробно–рациональных уравнения. Они будут не очень сложными, но все же отнимут время на решение. Поэтому проще решить это уравнение используя замену. Надо только увидеть, что в уравнении есть повторяющееся выражение. Пусть $\frac{x+1}{|x-1|} = t$. Тогда $\frac{|x-1|}{x+1} = \frac{1}{t}$. С учетом замены уравнение примет следующий вид

$$7t + \frac{12}{t} - 31 = 0 \;\Rightarrow\; 7t^2 - 31t + 12 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} t_1 = 4 \\ t_2 = \frac{3}{7} \end{matrix}$$

А теперь сделаем обратную замену. Для первого случая получим

$$\frac{x+1}{|x-1|} = 4 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x-1>0 \;\Rightarrow\; x>1 \;\Rightarrow\; x+1 = 4x-4 \;\Rightarrow\; 3x=5 \;\Rightarrow\; x = \frac{5}{3} - \text{подходит, так как } \frac{5}{3} > 1 \\ x-1<0 \;\Rightarrow\; x<1 \;\Rightarrow\; x+1 = -4x+4 \;\Rightarrow\; 5x=3 \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{5} - \text{подходит, так как } \frac{3}{5} < 1 \end{array}\right.$$

Обращаю ваше внимание на то, что я специально раскрываю модуль по условию x – 1 > 0 (строгое неравенство), так как модуль у нас в знаменателе, а на ноль делить нельзя. В остальных же случаях неравенство должно быть не строгим (в случае, когда подмодульное выражение не отрицательно).
Для второго случая получим

$$\frac{x+1}{|x-1|} = \frac{3}{7} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x>1 \;\Rightarrow\; 7x+7 = 3x-3 \;\Rightarrow\; 4x=-10 \;\Rightarrow\; x = -\frac{10}{4} - \text{не подходит, так как } -\frac{10}{4} < 1 \\ x<1 \;\Rightarrow\; 7x+7 = -3x+3 \;\Rightarrow\; 10x=-4 \;\Rightarrow\; x = -\frac{2}{5} - \text{подходит, так как } -\frac{2}{5} < 1 \end{array}\right.$$

Сумму корней, увеличенную в 15 раз, вычислите самостоятельно. **Ответ:** 28.

B11. У первого и второго мотоциклистов была фора в 30 минут. В течении этого времени первый мотоциклист успел уехать на $l_1 = \upsilon_1 \Delta t = 25$ (км), а второй на $l_2 = \upsilon_2 \Delta t = 30$ (км). Чтобы догнать первого мотоциклиста, третий должен потратить время, равное

$$t_1 = \frac{l_1}{\Delta\upsilon_{13}} = \frac{l_1}{\upsilon_3 - \upsilon_1} = \frac{25}{\upsilon_3 - 50}$$

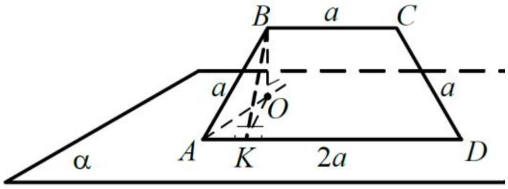
Чтобы догнать второго мотоциклиста, третий должен потратить время, равное

$$t_2 = \frac{l_2}{\Delta\upsilon_{23}} = \frac{l_2}{\upsilon_3 - \upsilon_2} = \frac{30}{\upsilon_3 - 60}$$

По условию задачи $t_2 - t_1 = 1$. Следовательно,

$$t_2 - t_1 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{30}{\upsilon_3 - 60} - \frac{25}{\upsilon_3 - 50} = 1$$

Мы получили простое дробно–рациональное уравнение. Как их решать подробно рассказано в теме «Уравнения» (параграф 1.04), скачать которую вы можете у меня на сайте. **Ответ:** 75.

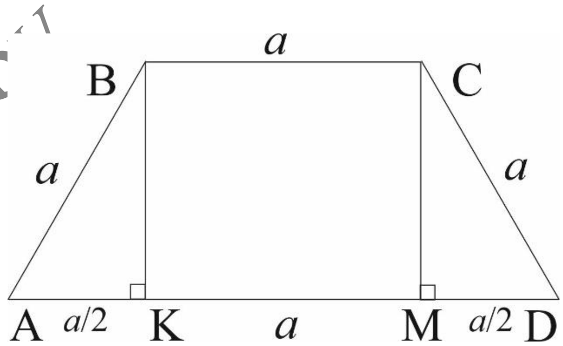


B12. Пусть AD = 2a. Так как по условию задачи «длина большего основания трапеции вдвое больше длины каждой из остальных сторон», то AB = BC = CD = a.

Опустим из точки B перпендикуляр BO на плоскость α. Угол, образованный плоскостью трапеции и плоскостью α, это угол BKO. Его синус (да-да, нам надо найти косинус, но искать будем синус) найдем из прямоугольного треугольника BKO: $\sin(\angle BKO) = \frac{BO}{BK}$. Косинус этого угла будет равен $\cos(\angle BKO) = \sqrt{1 - (\sin(\angle BKO))^2}$.

Рассмотрим треугольник ABO. По условию задачи нам дан синус угла BAO, который по определению будет равен

$$\sin(\angle BAO) = \frac{BO}{AB} \;\Rightarrow\; BO = AB\sin(\angle BAO) = a\frac{3\sqrt{3}}{7}$$



Рассмотрим треугольник ABK. Так как трапеция равнобедренная, то $AK = MD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a}{2} = 0,5a$. Запишем теоремы Пифагора для треугольника ABK

$$AB^2 = AK^2 + BK^2 \;\Rightarrow\; BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

А теперь мы можем найти синус угла BKO

$$\sin(\angle BKO) = \frac{BO}{BK} = \frac{a\cdot\frac{3\sqrt{3}}{7}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\cdot 3\sqrt{3}}{7} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\cdot 3\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{6}{7}$$

Косинус угла BKO будет равен

$$\cos(\angle BKO) = \sqrt{1 - (\sin(\angle BKO))^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{13}{49}} = \frac{\sqrt{13}}{7}$$

И не забываем, что в ответ надо записать $21\sqrt{13}\cos(\angle BKO) = 21\sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{13}}{7} = 39$.

Ответ: 39.