В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории.
Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.
Если у вас есть более красивые решения отдельных задач – поделитесь! ☺
2016/2017, 1 этап, первый вариант

А1. Между точками 0 и 1 находится пять делений. Это значит, что цена деления 0,2. Дальше сами.
Ответ: 2.

А2. Отрезок MN – средняя линия треугольника ABC (внимательно посмотрите на рисунок). Средняя линия параллельна основанию. Так же помним, что сумма внутренних углов любого треугольника равна 180 градусов.
Ответ: 4.

А3. Делим в столбик 3 на 7. Потом к результату добавляем 1 и округляем до сотых. Все просто.
Ответ: 2.

А4. Немного повторения. Степенью числа a с показателем n (a принадлежит рациональным числам, n – натуральным), называется произведение числа a на число a n раз: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ...... \cdot a}_{n}$. Число a – основание степени, n – показатель степени. **ЗАПОМНИТЕ!!! Нет свойств, связанных с суммой или разностью ОСНОВАНИЙ степени!!!**

1. Степень произведения двух или нескольких сомножителей равна произведению степеней этих сомножителей с тем же показателем: $(abc)^n = a^n b^n c^n$ И наоборот, произведение одинаковых степеней нескольких величин равно той же степени произведения этих величин: $a^n b^n c^n ... = (abc...)^n$

На практике это свойство применяется, когда основание степени достаточно большое число. Например, у нас есть число 35^6. Согласно этому свойству $35^6 = (5 \cdot 7)^6 = 5^6 \cdot 7^6$. Ну а дальше обычно находятся числа, с которыми мы «подружим» получившихся два множителя.

2. Если степень осчастливливает дробь, то она осчастливливает как числитель, так и знаменатель

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

3. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются:

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad \text{или} \quad a^m a^{-n} = a^{m-n}.$$

4. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ или $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$.

5. При возведении степени в степень, показатели степеней перемножаются: $(a^m)^n = a^{mn}$

И еще несколько важных свойств **6**. $a^0 = 1$ **7**. $a^1 = a$ **8**. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ и наоборот $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ **9**. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

А теперь вернемся к нашему примеру. Если что–то непонятно – внимательно перечитываем теорию.

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right)^{-6} : \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right)^{-8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5\cdot(-6)} : \left(\frac{3}{2}\right)^{4\cdot(-8)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{30} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-32} = \left(\frac{2}{3}\right)^{30} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-32} = \left(\frac{2}{3}\right)^{30-32} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$$

Ответ: 3.

А5. Рассмотрим последовательность чисел 3, –6, 12, –24, 48 …
Каждый последующий член получается умножением предыдущего члена на одно и тоже число. Такая последовательность называется геометрической прогрессией. Геометрической прогрессией называется последовательность чисел $b_1, b_2, ..., b_n, ...$, для которой имеют место соотношения:

b_1 – заданное число, первый член прогрессии; $b_n = b_{n-1}\, q$ – n–й член прогрессии ($n \geq 2$);
q – знаменатель прогрессии ($q \neq 1$).

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = ... = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется бесконечно убывающей.

Формула n–го члена прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$. Так как каждый последующий член прогрессии меньше предыдущего в 4 раза, то q = ¼. Используем формулу для n–го члена прогрессии

$$b_5 = b_1 q^{5-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

Ответ: 1.

А6. **Процентом** (лат. pro centum – с сотни) называется сотая часть целого. 1 % это сотая часть числа. Например, 2 % от числа 25 находится как $\frac{2\%}{100\%} \cdot 25 = 0,5$.

Однако можно и по–другому. Сначала находим сколько составляет один процент от 25 и потом умножаем это значение на 2 процента $\frac{25}{100\%} \cdot 2\% = 0,5$

Есть и третий способ. Составим пропорцию и решим ее $\begin{matrix} 25 - 100\ \% \\ x - 2\ \% \end{matrix}$

Какие рассуждения вам более понятны такие и используйте при решении задач. На мой взгляд вариант с пропорцией дает меньший шанс на ошибку.

В нашем случае 54 холодильника это 27 %. В первом квартале было продано 100%–33%–27%–18%=22% холодильников. Составим пропорцию и найдем сколько холодильников было продано в первом квартале

$$\begin{matrix} 54 - 27\ \% \\ x - 22\ \% \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{22\%}{27\%} \cdot 54 = 44$$

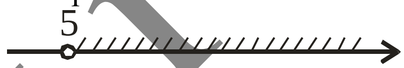
Ответ: 4.

А7. Немного теории о простых неравенствах и неравенствах с модулем.

Рассмотрим простейшие неравенства.

ПРИМЕР. *Найдите наименьшее целое решение неравенства $x > 5$.*

Такая запись означает, что любое число большее 5 удовлетворяет неравенству. Это неравенство **СТРОГОЕ**. На числовой прямой его можно изобразить так



Точка, соответствующая числу 5, выколота, то есть не входит в решение неравенства. Наименьшее целое решение данного неравенство равно 6. Если стоит задача просто решить неравенство, то ответ записывается как $x \in (5;+\infty)$. Круглая скобка перед 5 говорит о том, что 5 не входит в ответ.

ПРИМЕР. *Найдите наименьшее решение неравенства $x \geq 5$.*

Такая запись означает, что любое число большее либо равное 5 удовлетворяет неравенству. Это неравенство **НЕ СТРОГОЕ**. На числовой прямой его можно изобразить так

Точка, соответствующая числу 5 закрашивается, то есть входит в решение неравенства. Наименьшее целое решение данного неравенство равно 5. Если стоит задача просто решить неравенство, то ответ записывается как $x \in [5;+\infty)$. Квадратная скобка перед 5 говорит о том, что 5 входит в ответ.

А теперь о неравенствах с модулем.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $|2x-3| < 5$.

Разумеется, это неравенство можно решить просто раскрыв модуль (как мы это делали при решении уравнений). Однако в подобных примерах, **когда в одной части модуль, а в другой все остальное и при этом модуль МЕНЬШЕ выражения, стоящего по другую сторону знака неравенства,** удобно пользоваться следующей теоремой.

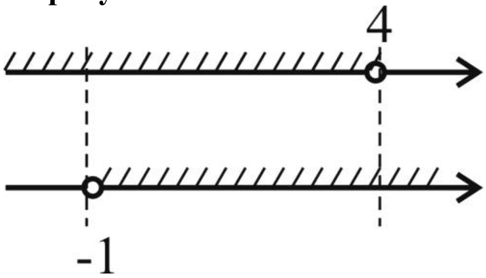
ТЕОРЕМА. Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно **СИСТЕМЕ** $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

В частности, неравенство вида $\left|f(x)\right|<a$ (a>0) равносильно системе $\begin{cases} f(x)<a \\ f(x)>-a \end{cases}$

Таким образом, у нас получается система

$$\begin{cases} 2x-3<5 \\ 2x-3>-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x>-1 \end{cases}$$

Не ленитесь делать пояснительные рисунки!!!



Так как мы имеем дело с системой неравенств, то мы берем только общие решения.

Ответ: $-1<x<4$.

Как запомнить, что в данном случае у нас будет именно система, а не совокупность? Важное мнемоническое правило. **Если модуль МЕНЬШЕ, то решений будет МАЛО. Следовательно, будет система, так как при решении системы мы берем только ОБЩИЕ решения.**

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $\left|x^2-4\right|+2x+1>0$.

Перенесем все слагаемые кроме модуля в правую часть уравнения

$$\left|x^2-4\right|>-2x-1$$

В подобных примерах, **когда в одной части модуль, а в другой все остальное и при этом модуль БОЛЬШЕ выражения, стоящего по другую сторону знака неравенства,** удобно пользоваться следующей теоремой.

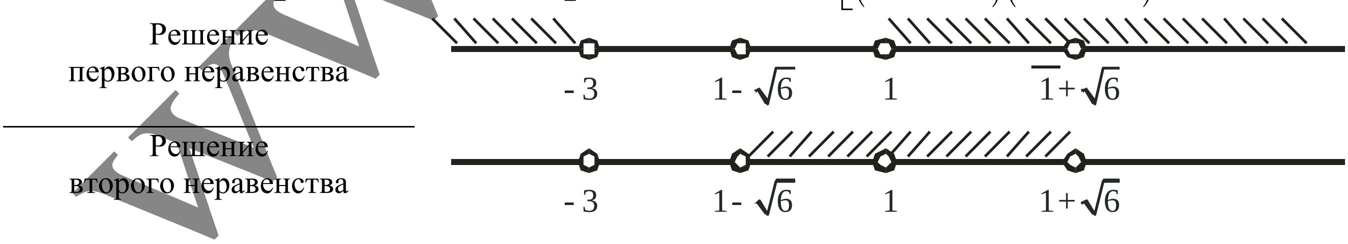
ТЕОРЕМА. Неравенства вида $\left|f(x)\right|>g(x)$ равносильно **СОВОКУПНОСТИ (а не системе)**

$$\left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$$

В частности, неравенство вида $\left|f(x)\right|>a$ (a>0) равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)>a \\ f(x)<-a \end{array}\right.$

Таким образом, с учетом теоремы получаем

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4>-2x-1 \\ x^2-4<2x+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-3>0 \\ x^2-2x-5<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+3)>0 \\ \left(x-1+\sqrt{6}\right)\left(x-1-\sqrt{6}\right)<0 \end{array}\right.$$



При решении таких неравенств мы берем ВСЕ решения, так как у нас СОВОКУПНОСТЬ!!!

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup\left(1-\sqrt{6};+\infty\right)$

Как запомнить, что в данном случае у нас будет именно совокупность, а не система? Важное мнемоническое правило. **Если модуль БОЛЬШЕ, то решений будет МНОГО. Следовательно, будет совокупность, так как при решении совокупности мы берем ВСЕ решения.**

Вернемся к нашему примеру. Нам надо решить каждую из систем и сверить ответ с представленным. Я уверен, что если вы внимательно прочитали теорию выше, то без труда сделаете это самостоятельно.

Ответ: 5.

А8. Для любой стороны любого треугольника должно выполняться соотношение $a + b > c$, где a, b и c – стороны треугольника. В нашем случае $3{,}4 + 8{,}7 > c \Rightarrow c < 12{,}1$. Так как длина третей стороны целое число, то она равна 12. Периметр вычислите самостоятельно.
Ответ: 5.

А9. ***Общим кратным*** нескольких чисел называется число, являющееся кратным каждого из них. Например, числа 14, 18, 7 имеют общее кратное число 252, однако число 126 тоже является общим кратным этих чисел. Среди всех общих кратных всегда есть наименьшее, которое называется ***наименьшим общим кратным*** (обозначается НОК). В нашем примере наименьшим общим кратным перечисленных чисел будет число 126. Кратко этот факт записывается так: НОК (14, 18, 7) = 126.
Если числа небольшие, то наибольшее общее кратное можно легко угадать. Если же даны большие числа, то НОК можно найти разложением чисел на простые множители и выписыванием тех множителей, которые входят хотя бы в одно из данных чисел. После этого каждый такой множитель нужно взять с наибольшим показателем, с которым он входит во все данные числа. Затем следует произвести умножение.
ПРИМЕР. *Пусть даны числа* 1080 *и* 8100. *Найти НОК* (1080, 8100).
Раскладываем число 1080 на простые делители: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5. Выпишем теперь все простые делители числа 8100: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 5. Таким образом, $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, а $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. Значит,

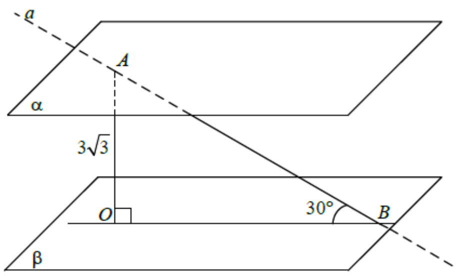
$$\text{НОК}(1080, 8100) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 16200.$$

Ответ. НОК (1080, 8100) = 16200.
Вернемся к нашей задаче. Найдем НОК (15;20)

$$\begin{matrix} 15 = 3\cdot 5 \\ 20 = 2\cdot 2\cdot 5 \end{matrix} \;\Rightarrow\; НОК(15;20) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 60$$

А теперь раскладываем 915 на множители. Начнем с того, что 915 делится на 5. Потом учтем, что 183 делится на 3 (так как сумма чисел числа 183 делится на 3): $915 = 5\cdot 183 = 5\cdot 3\cdot 61$
Ответ: 3.

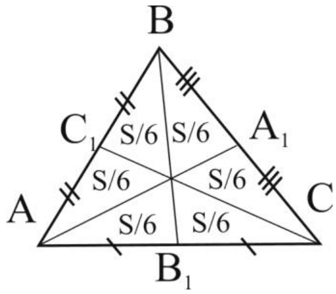
А10. Обязательно делаем рисунок!



$$\sin 30^\circ = \frac{AO}{AB} \;\Rightarrow\; AB = \frac{AO}{\sin 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{3}$$

Ответ: 2.

А11. Внимательно смотрим на рисунок. Обращаем внимание на то, что треугольник равносторонний. Вспоминаем, что биссектрисы в равностороннем треугольнике так же являются и медианами. Вспоминаем одно очень важное свойство медиан: медианы делят треугольник на шесть треугольников одинаковой площади, так как у каждой пары треугольников равные основания и общая высота (это свойство справедливо для любого треугольника).



В нашей задаче площадь закрашенной части будет равна S/3, а не закрашенной 2S/3. Площадь закрашенной части возьмем за 100 % (так как сравнение идет именно с ней). Следовательно, площадь не закрашенной части составляем 200% от площади закрашенной части.
Ответ: 1.

А12. Путь длина большего катета равна a. Тогда длина меньшего катета равна $(a – 3)$. Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то

$$\frac{1}{2}a(a-3) = 65 \;\Rightarrow\; a(a-3) = 130 \;\Rightarrow\; a^2 - 3a - 130 = 0$$

Ответ: 5.

А13. Часто бывает полезно преобразовать многочлен так, чтобы он был представлен в виде произведения нескольких сомножителей. Такое тождественное преобразование называется ***разложением многочлена на множители***. В этом случае говорят, что многочлен ***делится*** на каждый из этих сомножителей. При разложении многочленов на множители применяют три основных приема: вынесение множителя за скобку, использование формул сокращенного умножения и способ группировки.

1. **Вынесение множителя за скобку.** Из распределительного закона непосредственно следует, что

$$ac + bc = c(a + b).$$

Этим можно воспользоваться для вынесения множителя за скобки.

2. **Использование формул сокращенного умножения.** Формулы сокращенного умножения позволяют довольно эффективно представлять многочлен в форме произведения.

3. Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

4. **Способ группировки.** Этот способ заключается в том, что слагаемые многочлена можно сгруппировать различными способами на основе сочетательного и переместительного законов. На практике он применяется в тех случаях, когда многочлен удается представить в виде пар слагаемых таким образом, чтобы из каждой пары можно было выделить один и тот же множитель. Этот общий множитель можно вынести за скобку и исходный многочлен окажется представленным в виде произведения.

Посмотрим на нашу дробь. В числителе будем использовать разложение квадратного трехчлена на множители. В знаменателе – формулу сокращенного умножения (квадрат разности.)

$$\frac{6x^2+29x-5}{36x^2-12x+1}=\frac{6\left(x-(-5)\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)}{(6x)^2-2\cdot 6x\cdot 1+1^2}=\frac{(x+5)(6x-1)}{(6x-1)^2}=\frac{x+5}{6x-1}$$

Ответ: 4.

А14. Прямая пропорциональность это функция вида $y = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Так как у нас даны координаты двух точке, то

$$\begin{matrix} y_2=kx_2 \\ y_1=kx_1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1}=\frac{kx_2}{kx_1} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1}=\frac{x_2}{x_1}$$

Нам надо найти ординату (координату на оси OY) второй точки: $\frac{y_2}{y_1}=\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow y_2=y_1\frac{x_2}{x_1}$

Ответ: 1.

А15. Парабола проходит через точку (–2;–2). Подставим координаты точку в формулу

$$y=ax^2 \Rightarrow a=\frac{y}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Ответ: 5.

А16. Для решения этого задания вам надо знать формулы приведения и значение тригонометрических функций стандартных углов.

$$4\cos\left(180^\circ+45^\circ\right)+6\sqrt{3}\sin\left(360^\circ+60^\circ\right)=-4\cos 45^\circ+6\sqrt{3}\sin 60^\circ=-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{2}+9$$

Ответ: 3.

А17. Сначала запишем то, что дано в условии задачи $S_1=S_2+324,\quad S_1+S_2=S_3$. Используя данные рисунка и то, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон, получаем (высоту участков обозначаем через a, ширину через b)

$$\begin{cases} a_1b_1+a_2b_2=a_3b_3 \\ a_1b_1=a_2b_2+324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 33\cdot b_1+a_2b_2=30\cdot 42 \\ 33\cdot b_1=a_2b_2+324 \end{cases}$$

Для решения системы используем метод сложения

$$\left(33\cdot b_1+a_2b_2\right)+\left(33\cdot b_1\right)=\left(30\cdot 42\right)+\left(a_2b_2+324\right) \Rightarrow 66b_1=1260+324 \Rightarrow b_1=24$$

Из рисунка видно, что ширина второго участка равна разности ширины третьего и первого участков, то есть $b_2=42-b_1=42-24=18$. А теперь подставим ширину первого и второго участков во второе уравнение системы и найдем высоту второго участка $33\cdot b_1=a_2b_2+324 \Rightarrow 33\cdot 24=a_2\cdot 18+324 \Rightarrow a_2=26$.

Периметр второго участка вычислите самостоятельно.

Ответ: 4.

А18. Для решения этого задания нам понадобиться метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории. Не игнорируйте его!

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.

Поняли что–нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $(6–x)(x+3)\le 0$

При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида ($x \pm a$), а не ($a \pm x$) и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже.

У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем –1 из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3)\le 0$$

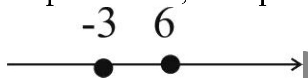
Сокращая на –1 не забываем поменять знак неравенства на противоположный

$$(x-6)(x+3)\ge 0$$

Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступать к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

$$x-6=0 \Rightarrow x=6 \text{ и } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

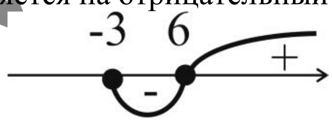
Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.



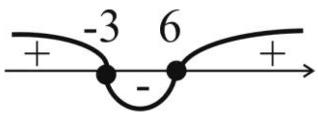
Если все множители неравенства записаны в виде($x \pm a$) и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!!

Не верите? Можем проверить. Пусть x=7, тогда $(x–6)(x+3) = (7–6)(7+3)=1\cdot 10=10>0 \Rightarrow$ выражение положительно

А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства уникален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный



В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства «≥», то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка: $(-\infty; -3]$ и $[6; +\infty)$.

И еще один пример.

ПРИМЕР: *Найдите наибольшее целое решение неравенства* $(x-2)(x^2+x-6)<0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

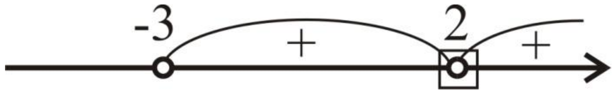
$$x^2+x-6=0 \ \Rightarrow \ x_1=-3,\ x_2=2 \ \Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

Перепишем неравенство в новом виде: $(x-2)(x-2)(x+3)<0 \ \Rightarrow \ (x-2)^2(x+3)<0$

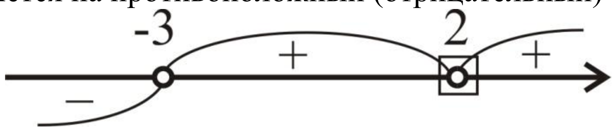
При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.

Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно

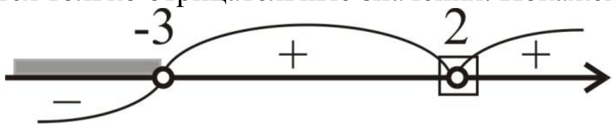
При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение (x – 2) возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!



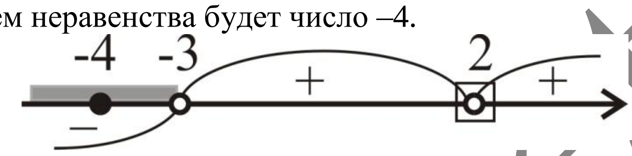
В точке –3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой



Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до –3 (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число –4.



Ответ: –4.

Метод интервалов для рациональных функций можно сформулировать в следующем виде.

1. Привести неравенство к стандартному виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, то есть, чтобы слева была дробь, а справа был ноль.

2. Разложить на множители многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (как мы знаем, для этого придётся решить уравнения $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$). Другими словами надо сделать так, чтобы в числителе и знаменателе дроби были только произведения скобок вида ($x \pm a$), где a – число. В некотором плане это подобно методы решения уравнений, который мы прошли в первой главе.

3. Нули числителя, не совпадающие с нулями знаменателя, отметить на числовой оси **точками** (если неравенство нестрогое; если строгое – кружочками), а нули знаменателя − **кружочками** (на ноль делить нельзя).

ЕЩЕ РАЗ НАПОМНЮ, ЧТО ЕСЛИ ВСЕ МНОЖИТЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНЫ В ВИДЕ ($x \pm a$) И НЕТ МИНУСОВ ПЕРЕД СКОБКАМИ, ТО ЗНАЧЕНИЕ ТАКОЙ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ БУДЕТ ВСЕГДА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ!!!

Провести кривую знаков, проходя через все точки, отмеченные на числовой прямой, меняя или не меняя знак в зависимости от степени двучлена, отвечающего данной точке.

4. Записать ответ, обращая особое внимание на граничные точки, часть из которых может быть «выколота».

А теперь вернемся к нашему неравенству. Перенесем все слагаемые в левую часть неравенства и приведем к общему знаменателю. **Никогда не домножайте (сокращайте) на знаменатель, если в нем есть переменная!!!!! Его нужно сохранить до конца решения!!!**

$$\frac{x^2-21}{-x} < 4 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-21}{-x} - 4 < 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-21-4(-x)}{-x} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2+4x-21}{-x} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2+4x-21}{x} > 0$$

Знаменатель «выплюнул» минус и поэтому мы поменяли знак неравенства на противоположный

$$x^2+4x-21=0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x_1=-7 \\ x_2=3 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \frac{(x-(-7))(x-3)}{x} > 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x+7)(x-3)}{x} > 0$$

А теперь самостоятельно рисуете координатную ось, ставите на ней точки, проводите змейку и ищите решения.

Ответ: 1.

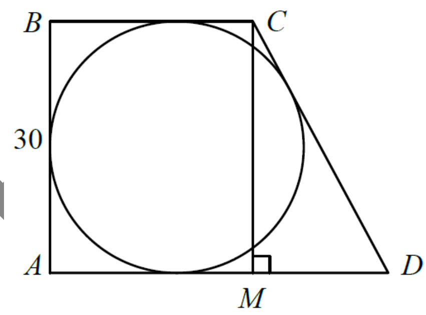
Часть В

В1. Уравнение окружности имеет вид $R^2=\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2$, где ($x_0$, y_0) – координата центра окружности. Таким образом, мы сразу можем узнать радиус окружности и координату центра окружности. Длину окружности мы легко вычислим зная радиус окружности. Осталось найти расстояние между центром окружности и точкой М. Как это сделать вы можете узнать самостоятельно в любом справочнике (или в гугле). Ищите тему «Расстояние между точками на плоскости» (маленькая подсказка – вам поможет теорема Пифагора).
Ответ: А1Б7В2.

В2. Функция называется нечетной если $f(-x)=-f(x)$. Применим это свойство к нашей задаче.

$$f(-5)-f(2)=-f(5)-\left(-f(-2)\right)=-f(5)+f(-2)=-(-3)+7=10$$

Ответ: 10.



В3. По определению площадь трапеции равна (так как трапеция прямоугольная ее высота равна АВ, а АВ равно двум радиусам)

$$S=\frac{AD+BC}{2}\cdot AB \;\Rightarrow\; 960=\frac{AD+BC}{2}\cdot 30 \;\Rightarrow\; AD+BC=64$$

В четырехугольник можно вписать окружность, если суммы противолежащих сторон равны. Это значит что

$$AD+BC=AB+CD \;\Rightarrow\; 64=39+CD \;\Rightarrow\; CD=34$$

По теореме Пифагора для треугольника MCD:

$$CD^2=CM^2+MD^2 \;\Rightarrow\; MD=\sqrt{CD^2-CM^2}=16$$

А теперь найдем меньшее основание (при этом учтем, что AD = AM + MD и AM = BC)

$$AD+BC=AB+CD \;\Rightarrow\; BC+BC+MD=64 \;\Rightarrow\; 2BC=48 \;\Rightarrow\; BC=24$$

Ответ: 24.

В4. Рассмотрим два метода решения данной системы. Первый – в лоб. Выразим x или y из первого уравнения (в данной системе не имеет значения какую неизвестную выражать, так как в любом случае мы получим дробь) и подставим во второе уравнение. При этом нас ждут очень долгие преобразования. Вы можете убедиться в этом самостоятельно. Второй метод намного красивей и элегантней.
Для его реализации надо заметить, что во втором уравнении системы у нас есть разность квадратов

$$\begin{cases} x-3y=3 \\ (x)^2-(3y)^2=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=3 \\ (x-3y)(x+3y)=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=3 \\ 3\cdot(x+3y)=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=3 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

Дальше сами.
Ответ: 12.

В5. Пусть А – искомое число, x – неполное частное и остаток. Тогда по условию задачи

$$A=42x+x=43x.$$

При этом важно понимать, что 0<x< 42. Так как по условию задачи А∈(100;1000), то

$$100<43x<1000 \;\Rightarrow\; \frac{100}{43}<x<\frac{1000}{43} \;\Rightarrow\; 2{,}32<x<23{,}2$$

Так как по условию задачи нам надо найти наибольшее число и остаток целое число, то

$$3\le x\le 23 \;\Rightarrow\; x=23 \;\Rightarrow\; A=43\cdot 23=989.$$

Проверим. При умножении 42 мы на 23 и прибавлении к результату 23 мы получаем 989. Это число меньше 1000 и удовлетворяет условию задачи.
Ответ: 989.

В6. Я не буду показывать решение данной задачи. Однако я дам вам теорию, после изучения которой вы просто обязаны решить этот пример самостоятельно.
Одно из типичных преобразований иррациональных выражений – избавление от иррациональности в знаменателе.

Для исключения (уничтожения) иррациональности в знаменателе дроби нужно подыскать простейшее из выражений, которое в произведении со знаменателем дает рациональное выражение, и умножить на подысканный множитель числитель и знаменатель данной дроби.

Если в знаменателе стоит выражение вида $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, то необходимо числитель и знаменатель умножить на сопряженное к нему выражение $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. В этом случае применяется формула $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$. В более сложных случаях иррациональность исключают не сразу, а в несколько этапов. Для начала немного совсем простых примеров.

ПРИМЕР. *Исключите иррациональность в знаменателе* $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ПРИМЕР. *Исключите иррациональность в знаменателе* $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$$

ПРИМЕР. *Исключите иррациональность в знаменателе* $\frac{a}{1-\sqrt{a}}$

$$\frac{a}{1-\sqrt{a}}=\frac{a\left(1+\sqrt{a}\right)}{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}=\frac{a\left(1+\sqrt{a}\right)}{1^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}=\frac{a\left(1+\sqrt{a}\right)}{1-a}$$

ПРИМЕР. *Вычислите* $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$.

ДАЖЕ НЕ ПЫТАЕМСЯ ПРИВЕСТИ ДРОБИ В СКОБКАХ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ!!!

Будем избавляться от иррациональности в каждой дроби по отдельности.

$$\frac{15}{\sqrt{6}+1}=\frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{\left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{6}-1\right)}=\frac{15\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}=\frac{15\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)}{5}=\frac{3\sqrt{6}-3}{1}=3\sqrt{6}-3.$$

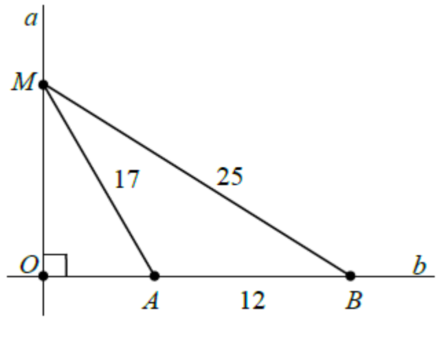
$$\frac{4}{\sqrt{6}-2}=\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}=\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4}=\frac{2\left(\sqrt{6}+2\right)}{1}=2\left(\sqrt{6}+2\right)$$

$$\frac{12}{3-\sqrt{6}}=\frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{\left(3-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)}=\frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{9-6}=\frac{4\left(3+\sqrt{6}\right)}{1}=4\left(3+\sqrt{6}\right)$$

И только теперь приступаем к действиям в скобках $3\sqrt{6}-3+2\sqrt{6}+4-12-4\sqrt{6}=\sqrt{6}-11$.

Окончательно получаем $\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=-115$

А теперь самостоятельно решите задание.
Ответ: –50.



B7. Пусть MO = x, OA = y. Запишем теоремс Пифагора для треугольника MOA и MOB: $x^2+y^2=17^2$ $\qquad x^2+\left(y+12\right)^2=25^2$

Мы получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными.
Проще всего решить эту систему будет методом вычитания

$$x^2+\left(y+12\right)^2-\left(x^2+y^2\right)=25^2-17^2 \;\Rightarrow\; \left(y+12\right)^2-y^2=\left(25-17\right)\left(25+17\right) \;\Rightarrow$$

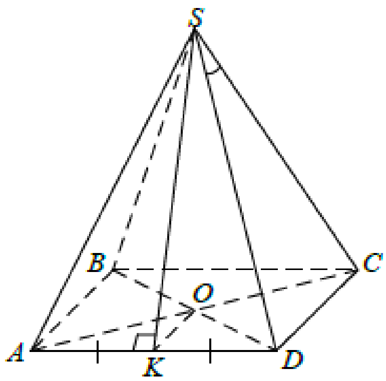
$$\left(y+12-y\right)\left(y+12+y\right)=\left(25-17\right)\left(25+17\right) \;\Rightarrow\; 12\left(y+12+y\right)=8\cdot 42 \;\Rightarrow\; 2y+12=28 \;\Rightarrow\; y=8$$

А теперь найдем расстояние MO: $x^2+y^2=17^2 \;\Rightarrow\; x=MO=\sqrt{17^2-y^2}$

Ответ: 15.

B8. В основании пирамид квадрат. По теореме Пифагора найдем сторону этого квадрата.

$$AB^2 + AD^2 = BD^2 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 = \left(7\sqrt{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$



Найдем апофему SK из прямоугольного треугольника SKD. По определению тангенс угла KSD равен

$$\mathrm{tg}KSD = \frac{KD}{SK} \quad \Rightarrow \quad SK = \frac{a/2}{\mathrm{tg}KSD} = \frac{a/2}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{ASD}{2}\right)} = \frac{a/2}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{2\mathrm{arctg}(7/9)}{2}\right)} =$$

$$= \frac{a/2}{\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}(7/9)\right)} = \frac{7/2}{7/9} = \frac{9}{2}$$

Площадь боковой поверхности равна площади четырех треугольников

$$S = 4S_{ASD} = 4\cdot\frac{1}{2}AD\cdot SK = 2\cdot 7\cdot\frac{9}{2} = 63$$

Ответ: 63.

B9. Достаточно простое тригонометрическое уравнение

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x\left(2\sin x - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 180^{\circ} n \\ \left[\begin{array}{l} x = 30^{\circ} + 360^{\circ} n \\ x = 150^{\circ} + 360^{\circ} n \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Осталось только найти корни, которые удовлетворяют условию. Рассмотрим первый корень

$$x = 180^{\circ} n \quad \Rightarrow \quad 864^{\circ} \le 180^{\circ} n \le 880^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \frac{864^{\circ}}{180^{\circ}} \le n \le \frac{880^{\circ}}{180^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad 4{,}8 \le n \le 4{,}(8)$$

Второй корень

$$x = 30^{\circ} + 360^{\circ} n \quad \Rightarrow \quad 864^{\circ} \le 30^{\circ} + 360^{\circ} n \le 880^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \frac{864^{\circ} - 30^{\circ}}{360^{\circ}} \le n \le \frac{880^{\circ} - 30^{\circ}}{360^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad 2{,}3 \le n \le 2{,}36$$

Третий корень

$$x = 150^{\circ} + 360^{\circ} n \quad \Rightarrow \quad 864^{\circ} \le 150^{\circ} + 360^{\circ} n \le 880^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \frac{864^{\circ} - 150^{\circ}}{360^{\circ}} \le n \le \frac{880^{\circ} - 150^{\circ}}{360^{\circ}} \quad \Rightarrow$$

$$1{,}98 \le n \le 2{,}02 \quad \Rightarrow \quad n = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 150^{\circ} + 360^{\circ}\cdot 2 = 870^{\circ}$$

Ответ: 870.

B10. Рекомендую еще раз повторить теорию к задаче A7.
Я всегда говорю своим ученикам, что самая типичная ошибка при решении неравенств это забыть про знаменатель. То есть после приведения дробей к общему знаменателю ни в коем случае нельзя забывать про знаменатель, так как иначе мы потеряем нули знаменателя. Однако в этом неравенстве знаменатель $4 + |9 - x|$ никогда не будет равен нулю, так как $|9 - x| \ge 0$. Поэтому именно в этом неравенстве мы смело домножаем все что стоит в правой части неравенства на знаменатель, после чего мы забываем о том, что у нас была дробь

$$\frac{20}{4 + |9 - x|} > |9 - x| - 4 \quad \Rightarrow \quad 20 > \left(|9 - x| - 4\right)\left(|9 - x| + 4\right) \quad \Rightarrow \quad 20 > \left(|9 - x|\right)^2 - 16 \quad \Rightarrow \quad \left(|9 - x|\right)^2 - 36 < 0$$

При любых значениях переменной x знаменатель выражение $\left(|9 - x|\right)^2$ положительно. Значит мы можем забыть про модуль и решать данное неравенство как обыкновенное

$$\left(|9 - x|\right)^2 - 36 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 9)^2 - 6^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 9 - 6)(x - 9 + 6) < 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 15)(x - 3) < 0$$

Решением данного неравенства будет промежуток $(3;15)$. Следовательно, наибольшим решением будет 14, а количество решений будет 11.
Ответ: 154.

B11. Тем, кто сдает физику, будет проще решить эту задачу. ☺
Очевидно, что у плота нет двигателя и поэтому скорость его движения равна скорости реки. Пусть ско-

рость реки равна x. Тогда скорость катера равна $5x$. Когда катер плывет по течению его скорость будет равна $6x$, если против течения $4x$ (если это не очевидно, то повторите тему относительность движения). Пусть расстояние от A до B равно S. Тогда время движения катера и плота до их встречи будет равно

$$t=\frac{S}{\upsilon_{\text{сближения}}}=\frac{S}{\upsilon_{\text{плота}}+\upsilon_{\text{катер против течения}}}=\frac{S}{x+4x}=\frac{S}{5x}$$

При этом плот до встречи с катером прошел расстояние

$$S_{\text{плота 1}}=\upsilon_{\text{плота}}\cdot t=x\frac{S}{5x}=\frac{S}{5}$$

Тогда катер прошел расстояние

$$S_{\text{катера1}}=S-S_{\text{плота 1}}=\frac{4S}{5}$$

От места встречи до точки B катер двигается со скоростью $6x$ и тратит на это время равное

$$t_{\text{катера}}=\frac{S_2}{\upsilon_{\text{катер по течению}}}=\frac{\frac{4}{5}S}{6x}=\frac{2S}{15x}$$

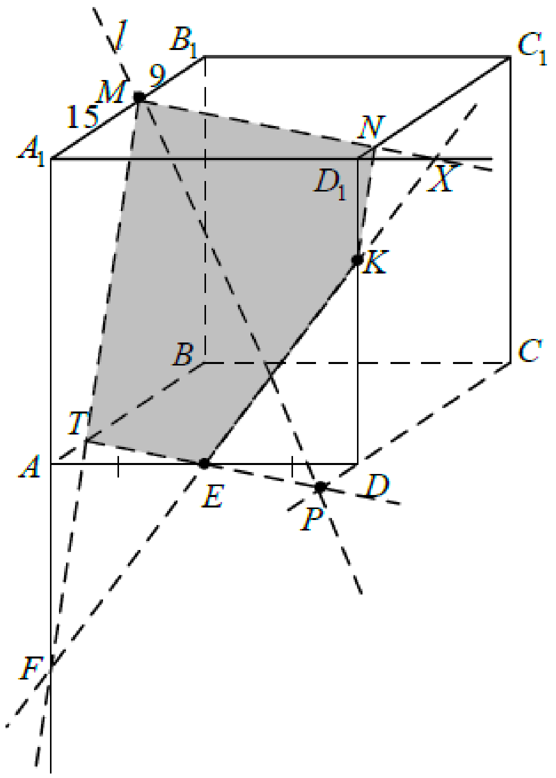
За это же время плот пройдет расстояние

$$S_{\text{плота 2}}=\upsilon_{\text{плота}}t_{\text{катера}}=x\cdot\frac{2S}{15x}=\frac{2S}{15}$$

Таким образом, все расстояние, пройденное плотом, равно $S_{\text{плота 1}}+S_{\text{плота 2}}=\frac{S}{5}+\frac{2S}{15}=\frac{1}{3}S$, а катер прошел расстояние $S_{\text{катера1}}+S_{\text{катера1}}=\frac{4S}{5}+\frac{4S}{5}=\frac{8S}{5}$. Возьмем расстояние, пройденное плотом, за 100 % и составим пропорцию

$$\begin{array}{l} 100\,\%-\frac{1}{3}S \\ X\ -\frac{8S}{5} \end{array}\quad\Rightarrow\quad X=\frac{\frac{8S}{5}}{\frac{1}{3}S}\cdot 100\,\%=480\,\%$$

То есть катер прошел на 380 % больший путь.
Ответ: 380.



B12. В условии задачи сказано, что прямая l проходит через точку M и пересекает прямую KE, где E – середина ребра AD. Следовательно, две пересекающиеся прямые l и KE задают единственную плоскость MKE (вспоминайте аксиому).
Так как прямая l лежит в плоскости MKE и пересекает прямую CD, то точку их пересечения P можно найти как точку пересечения плоскости MKE и прямой CD.
Так как прямая CD лежит в плоскости ABCD, а плоскость MKE пересекает плоскость ABCD по прямой TE, то точка P будет лежать на пересечении прямых TE и CD.
Так как длина ребра куба равна 24 и точка K делит DD_1 в отношении 2:1 считая от точки D, то DK=16.
Так как прямоугольный треугольник FAE равен прямоугольному треугольнику KDE (у них равны катеты AE и ED; равны вертикальные углы AEF и DEK; при этом треугольники прямоугольные), то AF=16.
А теперь все просто. Рассмотрим два подобных треугольника: FAT и FA_1M (они подобны по трем углам). Из их подобия следует

$$\frac{AT}{A_1M}=\frac{FA}{FA_1}\quad\Rightarrow\quad AT=A_1M\cdot\frac{FA}{FA_1}=6$$

Так как треугольники ATE и DPE равны (по стороне (AE=ED) и двум прилежащим к ней углам), то

$$PD=6.$$

Ответ: 6.