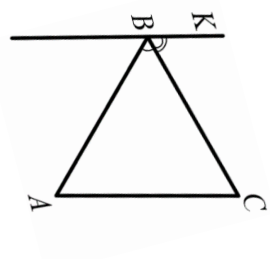
В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории.
Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.

Если у вас есть более красивые решения отдельных задач – поделитесь! ☺

2018/2019, 2 этап, первый вариант

А1. С левой стороны от числа –7 находится число –11. С правой стороны находится число –3. Их сумма равна –14. **Ответ:** 1.



А2. Смотрим внимательно на рисунок (я специально его повернул так, чтобы основание треугольника было горизонтально). Так как прямая KB параллельна основанию треугольника AC, то угол KBC будет равен углу BCA. А зная угол при вершине равнобедренного треугольника, мы легко найдем угол при его основании

$$\angle KBC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 52^\circ}{2} = 64^\circ.$$ **Ответ:** 2.

А3. Вспоминайте основные свойства показательноq функции. Преобразуем каждое выражение

$$2^{12,4} \cdot 2^{3,1} = 2^{12,4+3,1} = 2^{15,5}$$

$$2^{12,4} : 2^{3,1} = 2^{12,4-3,1} = 2^{9,3}$$

$$2^{9,7} \cdot 4^{9,7} = 2^{9,7} \cdot \left(2^2\right)^{9,7} = 2^{9,7} \cdot 2^{2\cdot 9,7} = 2^{9,7+2\cdot 9,7} = 2^{29,1}$$

$$\left(2^{12,4}\right)^2 = 2^{12,4\cdot 2} = 2^{24,8}$$

$$2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

Ответ: 3.

А4. Так как $\pi = 180^\circ$, то

$$\frac{5\pi}{9} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{9} = 100^\circ.$$ **Ответ:** 4.

А5. Если в точке M находится центр окружности, то для того, чтобы окружность прошла через одну из 5 предложенных точек, расстояние между центром окружности и искомой точкой должно быть равно радиусу окружности. Расстояние между точками на плоскости можно найти по формуле $S = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$. Проверим точку А. Координата точки А (2; –6). Координата точки M (2; 3). Значит расстояние между ними равно

$$S = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \sqrt{\left(2-2\right)^2 + \left(-6-3\right)^2} = 9$$

Очевидно, что точка А не подходит. Остается только сделать расчет для каждой из четырех оставшихся точек. **Ответ:** 3.

А6. Более продвинутые должны сразу же увидеть, что графиком функции является прямая линия, проходящая через начало координат, так как $3x - 2y = 0 \;\Rightarrow\; y = 1,5x$ и поиск правильного ответа займет пару секунд. А остальные должны перебирать все варианты ответов.

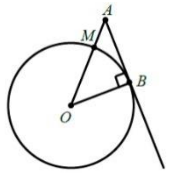
1. Если прямая параллельная оси Ох, то при любом *x* будет один и тот же *y*. В нашем случае это не так.
2. Если прямая параллельная оси Оу, то при любом *y* будет один и тот же *x*. В нашем случае это не так.
3. При подстановке $x = 3$ мы должны получить $y = 0$. Проверяйте самостоятельно.
4. При подстановке $x = 0$ мы должны получить $y = 0$. Проверяйте самостоятельно.
5. 3. При подстановке $x = 0$ мы должны получить $y = -2$. Проверяйте самостоятельно. **Ответ:** 4.

А7. Вспоминаем тему «Формулы сокращенного умножения»

$$\frac{\left(4x-3\right)^2}{16x^2 - 9} = \frac{\left(4x-3\right)\left(4x-3\right)}{\left(4x\right)^2 - 3^2} = \frac{\left(4x-3\right)\left(4x-3\right)}{\left(4x-3\right)\left(4x+3\right)} = \frac{4x-3}{4x+3}.$$ **Ответ:** 2.

A8. Очень простая задача. Смотрим внимательно на график. Первый и второй велосипедисты встретились через 0,5 часа после начала движения. Третий велосипедист выехал на 16 минут позже, чем первый и второй. Следовательно, до момента их встречи он двигался: 30 минут – 16 минут = 14 минут. **Ответ:** 5.

A9. Из рисунка видно, что MO = R. Так как по условию задачи AM:MO = 1:2, то AM = 0,5R. Угол между касательной и радиусом, проведенным к точке касания, равен 90°. Запишем теорему Пифагора для треугольника ABO



$AO^2 = OB^2 + AB^2 \;\Rightarrow\; \left(R + 0,5R\right)^2 = R^2 + 20^2 \;\Rightarrow\; R = 8\sqrt{5}$. **Ответ:** 2.

A10. Раскладываем каждое из чисел на множители

$$42 = 7\cdot 6 = 7\cdot 3\cdot 2; \quad 56 = 7\cdot 8 = 7\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \quad 84 = 21\cdot 4 = 7\cdot 3\cdot 2\cdot 2$$

Найдем делители числа 42

$$42 = 7\cdot 3\cdot 2 \;\Rightarrow\; 1;\; 2;\; 3;\; 6;\; 7;\; 14;\; 21;\; 42$$

Найдем делители числа 56

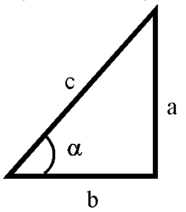
$$56 = 7\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \;\Rightarrow\; 1;\; 2;\; 4;\; 7;\; 8;\; 14;\; 28;\; 56$$

Найдем делители числа 84

$$84 = 7\cdot 3\cdot 2\cdot 2 \;\Rightarrow\; 1;\; 2;\; 3;\; 4;\; 6;\; 12;\; 14;\; 21;\; 28;\; 42;\; 84$$

Общими делителями будут числа 1; 2; 7 и 14. Их сумма равна 24. **Ответ:** 3.

A11. В прямоугольном треугольнике (см. рисунок слева) **синусом** острого угла α, называется отношение противолежащего катета к гипотенузе $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Синус угла BAC (или просто угла A) можно искать по–разному. Можно искать его из треугольника ABC, а можно из треугольника CFA. И именно по второму пути пойду я.



Так как CF высота прямоугольного треугольника ABC

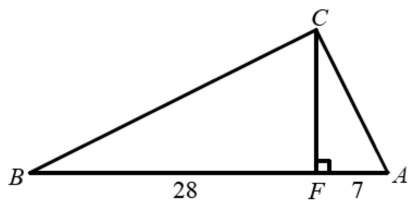
$$CF^2 = BF\cdot FA \;\Rightarrow\; CF = \sqrt{BF\cdot FA} = \sqrt{28\cdot 7} = \sqrt{4\cdot 7\cdot 7} = 2\cdot 7 = 14$$

По теореме Пифагора для треугольника CFA найдем CA

$$CA = \sqrt{CF^2 + FA^2} = 7\sqrt{5}$$

А теперь найдем синус угла A

$$\sin A = \frac{CF}{CA} = \frac{14}{7\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$ **Ответ:** 1.



A12. Очень простая задача. Вместо n подставляете 1; 2; 3; 4 и 5. Таким образом мы находим первые 5 членов последовательности. При вычислениях не забывайте, что четная степень «убивает» минус, а нечетная его «выплевывает». **Ответ:** 5.

A13. Некоторые из выражений мы сможем посчитать точно. Некоторые придется оценить.

Выражение 1. С первым выражением все просто $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4$.

Выражение 2. Тут немного сложней. Так как 25<33, то $\log_5 25 < \log_5 33 \;\Rightarrow\; 2 < \log_5 33$. С другой стороны, 33<125. Поэтому, $\log_5 33 < \log_5 125 < \;\Rightarrow\; \log_5 33 < 3$. Следовательно, $2 < \log_5 33 < 3$.

Выражение 3. По аналогии с вторым выражением. Так как 9<12, то $\log_3 9 < \log_3 12 \;\Rightarrow\; 2 < \log_3 12$. С другой стороны, 12<27. Поэтому, $\log_3 12 < \log_3 27 < \;\Rightarrow\; \log_3 12 < 3$. Следовательно,

$$2 < \log_3 12 < 3 \;\Rightarrow\; 3 < 1 + \log_3 12 < 4.$$

Ответ: 4.

A14. Задачи, в которых кто–то выполняет некоторую работу, или задачи, связанные с наполнением или опорожнением резервуаров, напоминают задачи на движение. Вся работа или полный объем резервуара аналогичны роли расстояния, а производительности выполняющих работу объектов аналогичны скоростям движения.

Часто в этих задачах объем работы не указывается и не является искомым. В таких случаях объем всей работы удобно принимать за **единицу**.

Введем буквенные обозначения, единицы измерения и зависимость трех величин.

1. Работа A (м^3, литры, машин, деталей и т. д.).
2. Производительность (скорость выполнения работы) P (можно писать и υ, по аналогии со скоростью движения) – работа в единицу времени (м^3/ч, га/смена, деталей/день).
3. Время работы t (ч, мин, смен и т. д.)
4. Связь между ними: $A = Pt$.
В целом задачи на работу аналогичны задачам на движение. Просто заменяйте скорость движения на производительность труда, а пройденный путь на совершенную работу.
По условию задачи «два ризографа, работая вместе, выполнили работу за 48 мин»**. Следовательно,**

$$\frac{A}{\upsilon_1+\upsilon_2}=t \;\Rightarrow\; \frac{1}{\upsilon_1+\upsilon_2}=\frac{48}{60} \;\Rightarrow\; \upsilon_1+\upsilon_2=\frac{5}{4}$$

где υ_1 и υ_2 скорости выполнения работы первым и вторым ризографом. Так как «*первый, работая один, мог бы выполнить эту работу за а часов*», то скорость его работы будет равна $\upsilon_1=\frac{A}{t}=\frac{1}{a}$. Найдем скорость работы второго ризографа

$$\upsilon_1+\upsilon_2=\frac{5}{4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{a}+\upsilon_2=\frac{5}{4} \;\Rightarrow\; \upsilon_2=\frac{5}{4}-\frac{1}{a}$$

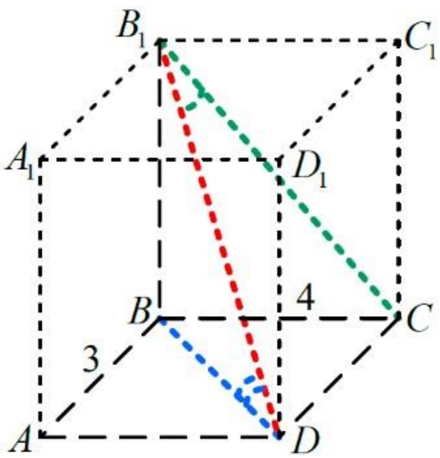
Следовательно, время, за которое второй ризограф сделает всю работу, будет равно

$$t=\frac{A}{\upsilon_2}=\frac{1}{\frac{5}{4}-\frac{1}{a}}=\frac{1}{\frac{5a-4}{4a}}=\frac{4a}{5a-4}$$

Ответ: 4.

А15. Некоторые задания, связанные с корнями квадратного уравнения, проще выполнить при помощи **теоремы Виета:** если квадратный трехчлен $ax^2+bx+c=0$ имеет корни, то справедливы следующие соотношения: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Важно помнить, что применять теорему Виета мы можем только убедившись, что дискриминант уравнения строго больше нуля (хотя в этом примере нам это делать не надо, так как иначе среди вариантов ответ должен был быть «невозможно вычислить»). Вычисления сделайте самостоятельно. Могу дать только небольшую подсказку. Избавьтесь от десятичных чисел умножив каждое слагаемое уравнения на 10. Просто так будет легче производить вычисления. **Ответ:** 1.

А16. По условию задачи нам дан угол между «*диагональю параллелепипеда и большей по площади боковой гранью*». Это будет угол между диагональю B_1D и плоскостью B_1C_1CD (берем плоскость, сторона которой равна 4, а не 3, так как площадь грани должна быть самой большой). Чтобы найти угол между прямой и плоскостью, мы должны спроецировать прямую на эту плоскость и найти угол между прямой и ее проекцией. В нашем случае проекцией диагонали B_1D будет диагональ B_1C. У нас получился прямоугольный треугольник B_1CD, в котором нам известен тангенс угла CB_1D. Следовательно,



$$\mathrm{tg}CB_1D=\frac{CD}{B_1C} \;\Rightarrow\; B_1C=\frac{CD}{\mathrm{tg}CB_1D}=\frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{12}{\sqrt{2}}$$

Запишем теорему Пифагора для треугольника B_1BC и найдем B_1B

$$B_1B=\sqrt{B_1C^2-BC^2}=\sqrt{\left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)^2-4^2}=\sqrt{72-16}=2\sqrt{14}$$

Так как диагональ основания равна 5 (легко находим через теорему Пифагора), то тангенс угла наклона диагонали B1D к плоскости основания будет равен

$$\mathrm{tg}B_1DB=\frac{B_1B}{BD}=\frac{2\sqrt{14}}{5}.$$

Ответ: 2.

А17. Раздел «Тригонометрия» находится на моем сайте в свободном доступе. Если у вас возникнут вопросы по решению, то рекомендую внимательно изучить параграфы из третей части. Нам предлагают решить достаточно простое уравнение

$$\cos^2 x - 2,5\cos x - 1,5 = 0 \;\Rightarrow\; t^2 - 2,5t - 1,5 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} t_1 = 3 \\ t_2 = -\dfrac{1}{2} \end{matrix}.$$

Первый корень не подходит. Разбираемся с вторым

$$t = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \cos x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \pm 120^o + 2\pi N \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x = +120^o + 2\pi N \\ x = -120^o + 2\pi N \end{matrix}$$

По условию задачи корни уравнения должны удовлетворять условию $135^o \le x \le 675^o$. Применим это ограничение для первого ответа

$$135^o \le x \le 675^o \;\Rightarrow\; 135^o \le 120^o + 2\pi N \le 675^o \;\Rightarrow\; 135^o - 120^o \le 360^o N \le 675^o - 120^o \;\Rightarrow$$

$$\frac{15^o}{360^o} \le N \le \frac{555^o}{360^o} \;\Rightarrow\; N = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 120^o + 360^o = 480^o$$

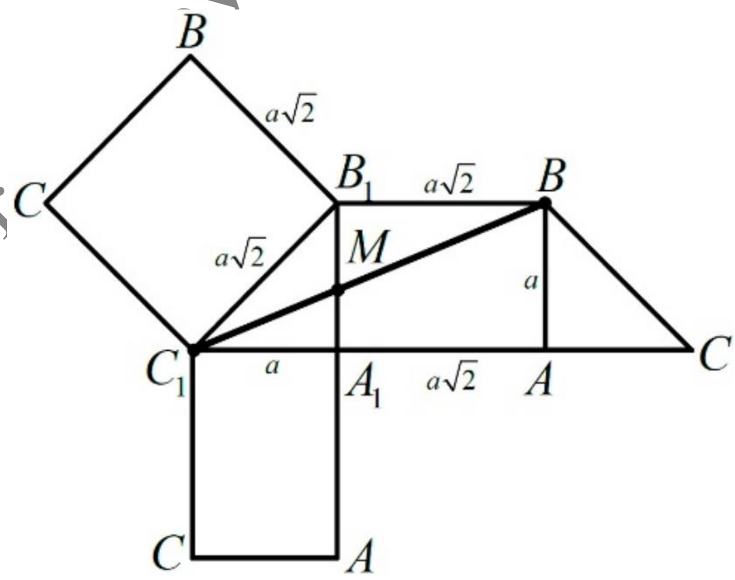
Обязательно применяем ограничение и к второму ответу

$$135^o \le x \le 675^o \;\Rightarrow\; 135^o \le -120^o + 2\pi N \le 675^o \;\Rightarrow\; 135^o + 120^o \le 360^o N \le 675^o + 120^o \;\Rightarrow$$

$$\frac{255^o}{360^o} \le N \le \frac{795^o}{360^o} \;\Rightarrow\; N = 1;\ 2 \;\Rightarrow\; x_2 = -120^o + 360^o = 240^o; \quad x_2 = -120^o + 720^o = 600^o$$

Сумму корней найдите самостоятельно. **Ответ:** 3.

А18. В основании призмы лежим равнобедренный прямоугольный треугольник. Пусть его катет равен *a*. Тогда гипотенуза ВС будет равна $a\sqrt{2}$. Гипотенуза равна стороне квадрата BCC_1B_1. Поэтому $BC=CC_1=C_1B_1=B_1B=A_1A$. Покажем все это на рисунке. Рассмотрим прямоугольный треугольник C_1BA. Запишем для него теорему Пифагора



$$C_1B^2 = C_1A^2 + AB^2 \;\Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{28+14\sqrt{2}}\right)^2 = \left(a + a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 \;\Rightarrow$$

$$28 + 14\sqrt{2} = a^2 + 2a^2 + 2a^2\sqrt{2} + a^2 \;\Rightarrow$$

$$14\left(2+\sqrt{2}\right) = 4a^2 + 2a^2\sqrt{2} \;\Rightarrow$$

$$14\left(2+\sqrt{2}\right) = 2a^2\left(2+\sqrt{2}\right) \;\Rightarrow$$

$$14 = 2a^2 \;\Rightarrow\; a^2 = 7 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{7}$$

Площадь полной поверхности призмы будет равна сумме площадей оснований и площади боковой поверхности. Площадь боковой поверхности равна произведению периметра основания на высоту призмы

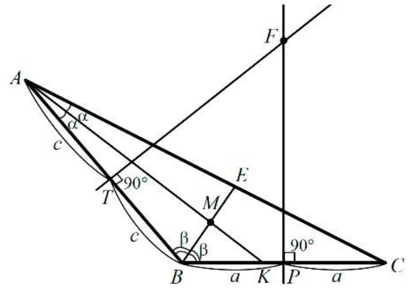
$$S_{бок} = p_{осн}H = \left(a + a + a\sqrt{2}\right)B_1B = a\left(2+\sqrt{2}\right)a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right) = 7\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right) = 14\sqrt{2} + 14$$

Площадь основания равна площади прямоугольного равнобедренного треугольника

$$S_{осн} = \frac{1}{2}a\cdot a = \frac{7}{2}$$

Таким образом, площадь полной поверхности будет равна

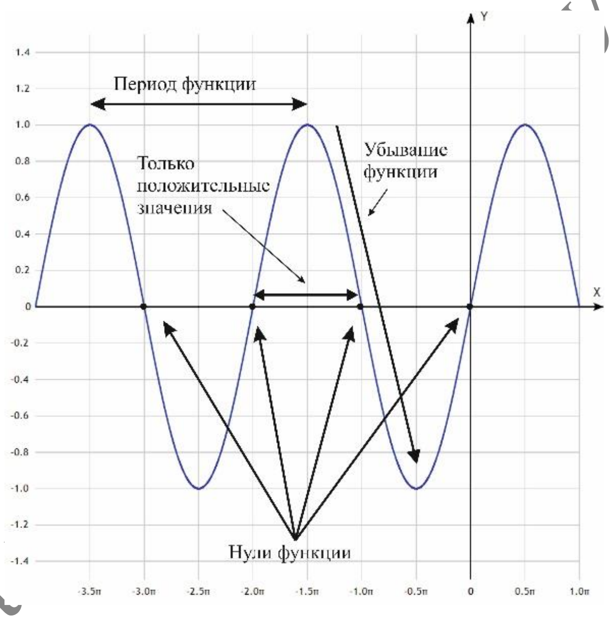
$$S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\cdot\frac{7}{2} + 14 + 14\sqrt{2} = 21 + 14\sqrt{2}.$$ **Ответ:** 5.



Часть В

В1. Очень простая задача.
Очевидно, что точка В – вершина треугольника. А теперь очень внимательно смотрим на линии, точку пересечения которых нам дают.
Точка М – точка пересечения биссектрис АК и ВЕ.
Точка F – точка пересечения срединных перпендикуляров FT и FP.
Ответ: А5Б1В2.

В2. Самое сложное в этом задании это построить график функции синуса и вспомнить основные свойства этой функции. Все остальное очень достаточно просто.



1. Вопрос с подвохом. Да, функция sin$x$ является периодической с периодом 2π (см. рисунок). Однако так как у нас функция задана на промежутке $[-3\pi;0]$ и поэтому утверждение будет ложно.
2. Утверждение **верно** (посмотрите на график).
3. Основное свойство четной функции: $f(-x)=f(x)$. Иногда говорят, что четная функция «съедает» минус. При этом четная функция симметрична относительно оси OY. Смотрим на график. Симметрии относительно оси OY нет. Утверждение не верно. На самом деле синус является нечетной функцией и график симметричен относительно начала координат. Основное свойство нечетной функции $f(-x)=-f(x)$. Иногда говорят, что нечетная функция «выплевывает» минус.
4. Утверждение **верно** (посмотрите на график).
5. Утверждение ложно (посмотрите на график).
6. Утверждение **верно** (посмотрите на график). **Ответ:** 246.

В3. Переведите рубли в копейки и посчитайте. При этом помните, что в 1 метре кубическом 1000 литров. Если вы не сможете с этими подсказками решить задачу, то вам не стоит идти в вуз. **Ответ:** 10500.

В4. У меня на сайте в свободном доступе размещена тема «Системы уравнений». Внимательно изучите параграфы 2.01 и 2.02. Нам предлагают решить элементарную систему. Выражаем x (хотя можем выразить и y) из первого уравнения и подставляем во второе. Получим

$$\begin{cases} x=y+1 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ (y+1)^2-(y+1)y+y^2=7 \end{cases} \Rightarrow (y+1)^2-(y+1)y+y^2=7$$

Решаем уравнение и находим корни $y_1=2$ и $y_2=-3$. Находим соответствующие им x

$$x_1=y_1+1=3 \text{ и } x_2=y_2+1=-2$$

Осталось только найти значение выражения $x_1y_2+x_2y_1$. Сделайте это самостоятельно. **Ответ:** –13.

В5. Сначала разберемся что делать с выражением в скобках. Одно из типичных преобразований иррациональных выражений – избавление от иррациональности в знаменателе. При математических расчетах если в знаменателе дроби стоит выражение под корнем, принято избавляться от корня в знаменателе. Это действие позволяет сделать вычисления более точными и называется избавлением от иррациональности в знаменателе. Если в знаменателе квадратный корень, то числитель и знаменатель дроби домножают на такой же квадратный корень. В результате корень в знаменателе исчезает. Обычно избавление от иррациональности в знаменателе вы будете производить с помощью домножения на сопряженное выражение. Этот способ вы будете применять в тех случаях, когда в знаменателе стоит не один корень, а сумма или разность.
Если в знаменателе стоит выражение вида $a+b$, то необходимо числитель и знаменатель умножить на сопряженное к нему выражение $a-b$. В этом случае применяется формула $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. В более сложных случаях иррациональность исключают не сразу, а в несколько этапов. Для начала немного совсем простых примеров.

ПРИМЕР. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

ПРИМЕР. $\frac{a}{1-\sqrt{a}}=\frac{a(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}=\frac{a(1+\sqrt{a})}{1^2-(\sqrt{a})^2}=\frac{a(1+\sqrt{a})}{1-a}$

Чуть более сложный пример.

ПРИМЕР. *Вычислите* $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot(\sqrt{6}+11)$.

Даже не пытаемся привести дроби в скобках к общему знаменателю!!! Будем избавляться от иррациональности в каждой дроби по отдельности.

$$\frac{15}{\sqrt{6}+1}=\frac{15(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}=\frac{15\cdot(\sqrt{6}-1)}{6-1}=\frac{15\cdot(\sqrt{6}-1)}{5}=\frac{3\sqrt{6}-3}{1}=3\sqrt{6}-3.$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}-2}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-4}=\frac{2(\sqrt{6}+2)}{1}=2(\sqrt{6}+2)$$

$$\frac{12}{3-\sqrt{6}}=\frac{12(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}=\frac{12(3+\sqrt{6})}{9-6}=\frac{4(3+\sqrt{6})}{1}=4(3+\sqrt{6})$$

И только теперь приступаем к действиям в скобках

$$3\sqrt{6}-3+2\sqrt{6}+4-12-4\sqrt{6}=\sqrt{6}-11.$$

Окончательно получаем

$$(\sqrt{6}-11)\cdot(\sqrt{6}+11)=-115$$

А теперь разбираемся что делать с вторым множителем (тем, на который мы умножаем скобки). С формулой сокращенного умножения $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ вы привыкли иметь дело в случаях, когда она очевидна. Например, $a^2-4ab+4b^2=(a-2b)^2$ или $a^2+6a+9=(a+3)^2$. В этой теме вы столкнетесь с этой же формулой сокращенного умножения, но применяться она будет к очень нестандартным выражениям.

ПРИМЕР. *Упростите выражение* $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$.

Выражение $7-2\sqrt{12}$ мы должны попытаться представить в виде квадрата двучлена, то есть в виде $(a-b)^2$. Вспомним, что $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. В нашем выражении есть слагаемое с коэффициентом 2. Следовательно, $\sqrt{12}$ есть не что иное, как *ab*. Таким образом, нам надо подобрать два числа, сумма которых равна 7, а произведение 12. Это числа 3 и 4. Следовательно

$$\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{7-2\cdot\sqrt{4}\sqrt{3}}=\sqrt{4-2\cdot\sqrt{4}\sqrt{3}+3}=\sqrt{(2)^2-2\cdot(\sqrt{4}\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$

Мы всегда обязаны помнить, что $\sqrt{a^2}=|a|$. Именно поэтому мы получаем $2-\sqrt{3}$, а не $\sqrt{3}-2$

Если Вы не смогли подобрать числа (в некоторых задачах могут быть достаточно большие числа, с которыми трудно будет работать), то воспользуйтесь следующим алгоритмом. Одно из слагаемых надо представить в виде $2\sqrt{X}$ (в нашем случае X = 12), второе слагаемое путь равно Y. Тогда мы имеем право записать систему

$$\begin{cases}ab=X\\a+b=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab=12\\a+b=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab=12\\b=7-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(7-a)=12\\b=7-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-7a+12=0\\b=7-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=3\\a_2=4\\b=7-a\end{cases}$$

Мы получим два значения. Не стоит этого пугаться. На самом деле одно из значений будет *a*, а второе будет *b*. **В любом случае лучше всего попытаться подобрать числа, чтобы мы получили формулу сокращенного умножения. Метод с системой применяйте только тогда, когда числа не играют.**

Возвращаемся к нашему примеру. Решим его по действиям. Сначала выполним действия в скобках

$$\frac{5\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}-\frac{5}{1+\sqrt{2}}=5\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)=5\left(\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}-\frac{1\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}\right)=$$

$$=5\left(\frac{\sqrt{2}+2}{1-2}-\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}\right)=5\left(\frac{\sqrt{2}+2-\left(1-\sqrt{2}\right)}{-1}\right)=5\left(\frac{\sqrt{2}+2-1+\sqrt{2}}{-1}\right)=-5\left(2\sqrt{2}+1\right)$$

Теперь разбираемся с вторым множителем.

$$\sqrt{9-4\sqrt{2}}=\sqrt{9-2\cdot2\sqrt{2}}=\sqrt{9-2\sqrt{4}\sqrt{2}}=\sqrt{8-2\sqrt{8}\sqrt{1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{8}\right)^2-2\sqrt{8}\sqrt{1}+1^2}=\sqrt{\left(\sqrt{8}-\sqrt{1}\right)^2}=\sqrt{8}-\sqrt{1}$$

Окончательно получим $-5\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{1}\right)=-5\left(\sqrt{8}+1\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{1}\right)=-5\left(8-1\right)=-35$. **Ответ:** –35.

В6. Для решения этого неравенства понадобиться метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории, которая обязательна к изучению.

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.

Поняли что–нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $(6–x)(x+3)\le0$

При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида ($x \pm a$), а не ($a \pm x$) и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже. У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем –1 из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3)\le0$$

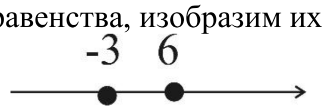
Сокращая на –1 не забываем поменять знак неравенства на противоположный

$$(x-6)(x+3)\ge0$$

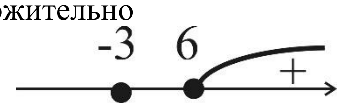
Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступать к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

$$x-6=0\Rightarrow x=6 \text{ и } x+3=0\Rightarrow x=-3$$

Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.

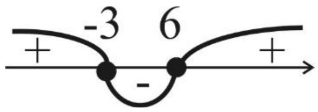


Если все множители неравенства записаны в виде($x \pm a$) и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!! Не верите? Можем проверить. Пусть x=7, тогда $(x–6)(x+3) = (7–6)(7+3)=1\cdot10=10>0 \Rightarrow$ выражение положительно



А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства уникален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный

В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства «≥», то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка: (–∞; –3] и [6; +∞).

И еще один пример.

ПРИМЕР: *Найдите наибольшее целое решение неравенства* $(x-2)(x^2+x-6)<0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

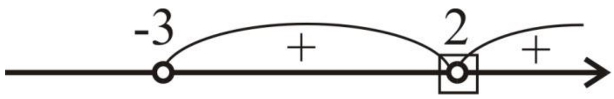
$$x^2+x-6=0 \;\Rightarrow\; x_1=-3,\; x_2=2 \;\Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

Перепишем неравенство в новом виде: $(x-2)(x-2)(x+3)<0 \;\Rightarrow\; (x-2)^2(x+3)<0$

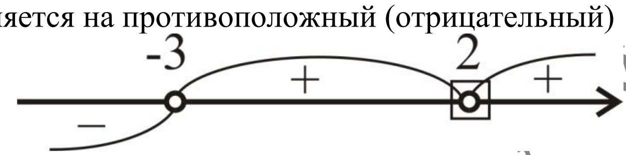
При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.

Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно

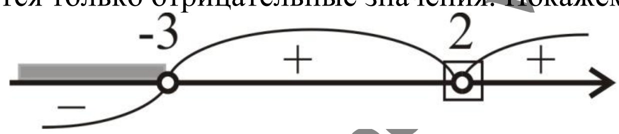
При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение (x – 2) возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!



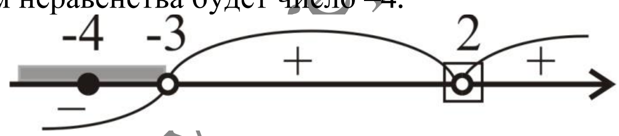
В точке –3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой



Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до –3 (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число –4.



Ответ: –4.

При решении неравенств:

1. Всегда переносите все слагаемые в левую часть (за исключением линейных неравенств).
2. Приводите дроби к общему знаменателю (вспоминайте тему уравнения).
3. Если в числителе и в знаменателе получившихся дробей есть квадратичные трехчлены – раскладывайте их на множители.
4. Все выражения в неравенстве представляйте в виде ($x \pm a$), а не ($a \pm x$).
5. Не забывайте менять знак неравенства при умножении/делении правой и левой части неравенства на отрицательно число.
6. Всегда делайте пояснительный рисунок!!!
7. Когда вы ищите нули числителя или знаменателя, вы решаете уравнение, а не неравенство. Знак неравенства пишется только один раз и только в самом неравенстве. Нули числителя, не совпадающие с нулями знаменателя, отмечайте на числовой оси **точками** (если неравенство нестрогое; если строгое – кружочками), а нули знаменателя – только **кружочками** (на ноль делить нельзя).
8. Всегда рисуйте змейку. Когда змейка выше оси – знак неравенства положительный, ниже оси – знак неравенства отрицательный.
9. Не забывайте отражать змейку, если выражение с нулевой точкой находится в четной степени.

А теперь вернемся к нашему неравенству. Чтобы было удобней раскладывать знаменатель на множители, домножим числитель и знаменатель на –1. При этом знак неравенства не изменится, так как мы производим умножение в пределах одной дроби, а не всего неравенства

$$\frac{56+6x-2x^2}{12-x-x^2}\le 1 \;\Rightarrow\; \frac{-(2x^2-6x-56)}{-(x^2+x-12)}\le 1 \;\Rightarrow\; \frac{2x^2-6x-56}{x^2+x-12}\le 1$$

Приведем все к общему знаменателю. Получим

$$\frac{2x^2-6x-56}{x^2+x-12}\le 1 \;\Rightarrow\; \frac{2x^2-6x-56}{x^2+x-12}-\frac{1\cdot\left(x^2+x-12\right)}{x^2+x-12}\le 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{2x^2-6x-56-\left(x^2+x-12\right)}{x^2+x-12}\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x^2-6x-56-x^2-x+12}{x^2+x-12}\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-7x-44}{x^2+x-12}\le 0$$

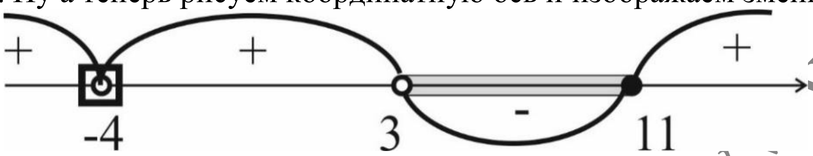
Разложим числитель и знаменатель на множители по формуле $ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Получим

$$\frac{x^2-7x-44}{x^2+x-12}\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-11)(x+4)}{(x+4)(x-3)}\le 0$$

Н**и в коем случае не сокращаем на (x+4)!!!** Делаем следующее

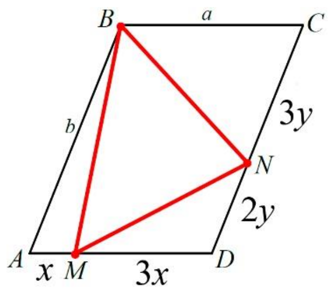
$$\frac{(x-11)(x+4)}{(x+4)(x-3)}\le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-11)}{(x+4)^0(x-3)}\le 0$$

То есть выражение (x+4) у нас будет в четной степени. Следовательно, при переходе через эту точку знак функции не изменится. Ну а теперь рисуем координатную ось и изображаем змейку



Целыми решениями неравенства будут числа 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11. Их сумма равна 60. **Ответ:** 60.

B7. Мы не сможем найти площадь треугольника напрямую. Поэтому мы будем находить ее как разность площадей параллелограмма и трех треугольников (ABM, BCN и NDM).



Нам не даны стороны параллелограмма, но дана его площадь. Пусть AM = x. Тогда из условия следует, что MD = 3x и вся сторона AD = 4x. Если высоту, проведенную к стороне AD, обозначить как h_1, то площадь параллелограмма будет равна $S=4x\cdot h_1 \;\Rightarrow\; x\cdot h_1=\frac{S}{4}=20$.

Пусть ND = 2y. Тогда из условия следует, что CN = 3y и вся сторона CD = 5y. Если высоту, проведенную к стороне CD, обозначить как h_2, то площадь параллелограмма будет равна $S=5y\cdot h_2 \;\Rightarrow\; x\cdot h_2=\frac{S}{5}=16$.

Теперь найдем площади треугольников. Площадь треугольника ABM равна $S_{ABM}=\frac{1}{2}x\cdot h_1=10$. Площадь треугольника BCN равна $S_{BCN}=\frac{1}{2}3y\cdot h_2=24$. С площадью треугольника NDM немного сложней. Так как CN:ND = 3:2, то высота этого треугольника будет равна $h=\frac{2}{5}h_1$. Тогда площадь треугольника NDM будет равна $S_{NMD}=\frac{1}{2}3x\cdot\frac{2}{5}h_1=12$. И наконец находим площадь треугольника BNM

$$S_{BNM}=S-\left(S_{ABM}+S_{BCN}+S_{NMD}\right)=80-46=34.$$ **Ответ:** 34.

B8. Немного повторения. Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня.
Иррациональное уравнение, как правило, сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства. **Главное в иррациональном уравнении это проверить корни уравнения. Если корни целые числа, то лучше проверить их подстановкой в само уравнение. Если нет, то необходимо проверить их по ОДЗ.**
Сразу же сделаем замену. Пусть $x^2=t$. Тогда

$$\sqrt{t+18}=54-t$$

Обязательно записываем ОДЗ!!! $54-t\ge 0,\quad t+18\ge 0 \;\Rightarrow\; -18\le t\le 54$. Возводим во вторую степень правую и левую части уравнения

$$\sqrt{t+18}=54-t \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{t+18}\right)^2=(54-t)^2 \;\Rightarrow\; t+18=2916-108t+t^2 \;\Rightarrow\; t^2-109t+2898=0$$

Получаем два корня: $t_1 = 46,\quad t_2 = 63$. Второй корень не подходит по ОДЗ. Следовательно,

$$x^2 = 46 \;\Rightarrow\; x_1 = \sqrt{46},\; x_2 = -\sqrt{46} \;\Rightarrow\; x_1x_2 = -46$$

При решении этого уравнения мы столкнулись с не очень приятным квадратным уравнением. Однако есть другой способ решения, который нам поможет избежать этой неприятности. Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения и одновременно прибавим и отнимем 18. Получим

$$\sqrt{x^2+18} = 54 - x^2 \;\Rightarrow\; x^2 - 54 + \sqrt{x^2+18} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 18 - 18 - 54 + \sqrt{x^2+18} = 0$$

Пусть $\sqrt{x^2+18} = t.$ Тогда $x^2 + 18 = t^2$. Уравнение с заменой будет иметь следующий вид

$$t^2 + t - 72 = 0$$

Корни этого уравнения 8 и –9. Второй корень не подходит по смыслу, так как $\sqrt{x^2+18} = t \;\Rightarrow\; t \geq 0$. А дальше все просто

$$\sqrt{x^2+18} = t \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+18} = 8 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{x^2+18}\right)^2 = 8^2 \;\Rightarrow\; x^2 + 18 = 64 \;\Rightarrow\; x^2 = 46 \;\Rightarrow\; x_1x_2 = -46.$$ **Ответ:** –46.

B9. Для начала вспомним основное свойство нечетной функции: $f(-x) = -f(x)$. Иногда говорят, что нечетная функция «выплевывает» минус. При этом нечетная функция симметрична относительно начала координат. Про период тоже не забываем. Число T называется периодом функции $f(x)$ если для любого x из области определения $f(x)$ выполняется равенство $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$.

Найдем значение функции при $x = 34$. Так как $34 = -2 + 36$ и $T = 18$, то

$$f(34) = f(-2+2T) = f(-2)$$

Зная функцию и то, что она определена на промежутке $[-9;0]$, найдем ее значение при $x = -2$

$$f(-2) = x^2 + 9x = (-2)^2 + 9(-2) = -14 \;\Rightarrow\; f(34) = f(-2) = -14$$

Найдем значение функции при $x = -53$. Так как $-53 = 1 - 54$ и $T = 18$, то

$$f(-54) = f(1-3T) = f(1)$$

Так как по условию задачи функция нечетная, то $f(1) = -f(-1)$. Следовательно,

$$f(-54) = -f(-1) = -\left(x^2+9x\right) = -\left((-1)^2 + 9(-1)\right) = 8$$

Окончательно получим

$$f(34) - f(-53) = -14 - 8 = -22.$$ **Ответ:** –22.

B10. Если вы не знаете как решить уравнение, то вероятнее всего оно будет однородным. Что такое однородное уравнение? Скачайте у меня с сайта раздел «Уравнения» и внимательно изучите параграф 1.07. Аккуратно преобразуем уравнение

$$3^{2x^2} + 2\cdot 3^{x^2-13x+2} = 3^{5-26x} \;\Rightarrow\; 3^{2x^2} + 2\cdot 3^{x^2}\cdot 3^{-13x}\cdot 3^2 = 3^5\cdot 3^{-26x} \;\Rightarrow\; \left(3^{x^2}\right)^2 + 18\cdot 3^{x^2}\cdot 3^{-13x} = 243\cdot\left(3^{-13x}\right)^2$$

Пусть $3^{x^2} = a$ и $3^{-13x} = b$. Тогда

$$\left(3^{x^2}\right)^2 + 18\cdot 3^{x^2}\cdot 3^{-13x} = 243\cdot\left(3^{-13x}\right)^2 \;\Rightarrow\; a^2 + 18ab - 243b^2 = 0$$

Разделим каждое слагаемое на b^2

$$a^2 + 18ab - 243b^2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{a^2}{b^2} + \frac{18ab}{b^2} - \frac{243b^2}{b^2} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 18\frac{a}{b} - 243 = 0$$

И опять сделаем замену. Пусть $\frac{a}{b} = t$. Следовательно,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 18\frac{a}{b} - 243 = 0 \;\Rightarrow\; t^2 + 18t - 243 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} t_1 = -27 \\ t_2 = 9 \end{matrix}$$

Первый корень не подходит так как он отрицательный. А теперь делаем обратную замену

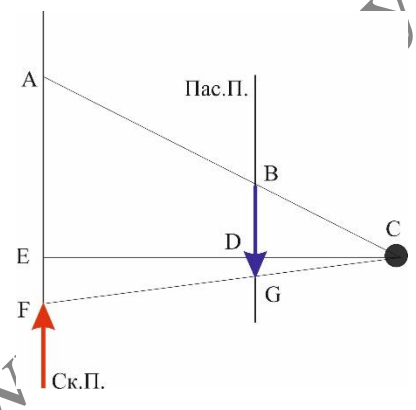
$$t_2 = 9 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} = 3^2 \;\Rightarrow\; \frac{3^{x^2}}{3^{-13x}} = 3^2 \;\Rightarrow\; 3^{x^2+13x} = 3^2 \;\Rightarrow\; x^2 + 13x = 2 \;\Rightarrow\; x^2 + 13x - 2 = 0$$

Дискриминант этого уравнения будет положителен. И вот тут начинается самое интересное. Нас просят найти не сумму корней, а сумму квадратов корней. В этом нам поможет теорема Виета и небольшие хитрые преобразования

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$$

Теперь смело применяем теорему Виета, находим сумму и произведение корней и находим ответ к данному заданию. В принципе это уравнение можно было решить гораздо проще если бы вы догадались разделить каждое слагаемое уравнения на 3^{5-26x}. Однако если вы не уверены в своих силах, то лучше не торопиться и решать так, как я вам показал. **Ответ:** 173.

B11. Обязательно переводим все единицы измерения в метры и секунды. Для этого скорость, выраженную в километрах в час, надо разделить на 3,6. Более подробно узнать как осуществляется перевод вы можете скачав у меня с сайта раздел «Кинематика» и внимательно изучив параграф 1.01. Таким образом, скорость скорого поезда будет равна 24 м/с, скорость пассажирского 17 м/с.



Обязательно делаем к этой задаче рисунок. Синей стрелкой обозначено направление движения пассажирского поезда, оранжевой – скорого поезда. В точке C располагается дерево.

Так как поезда двигаются во встречных направлениях, то

$$BG=L_{\text{пас.поезда}}-\upsilon_{\text{пас.поезда}}t=40-17t,$$

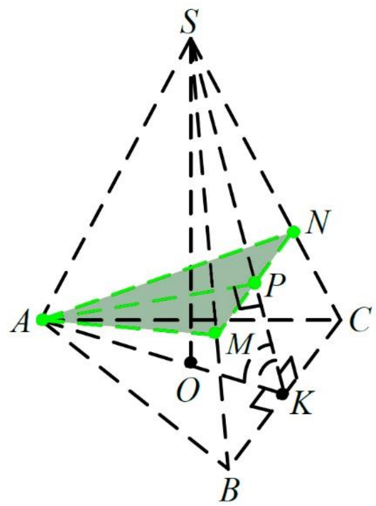
где t – время, в течение которого пассажирский поезд будет загораживать дерево от пассажира скорого поезда. Важно понять, что если бы пассажирский поезд не двигался, то он дольше загораживал бы дерево от пассажира скоростного поезда. А так как он двигается, он успевает пройти путь $\upsilon_{\text{пас.поезда}}t$ и таким образом он сокращает время в течение которого дерева не видно. Отрезок пути AF, на котором пассажиру скоростного поезда не видно дерева, равен

$$AF=\upsilon_{\text{скор.поезда}}t=24t.$$

Из подобия треугольников и имеем BCG и ACF получаем

$$\frac{BG}{AF}=\frac{CD}{CE}\quad\Rightarrow\quad\frac{40-17t}{24t}=\frac{30}{90}\quad\Rightarrow\quad t=\frac{24}{15}$$ (с). **Ответ:** 24.

B12. Решение задачи начинаем с построения сечения. Для этого в треугольнике ABC опускаем высоты на сторону BC. После этого соединяем получившуюся точку K с вершиной S. В получившемся треугольнике ASK опускаем высоту на сторону SK. Через получившуюся точку P проводим прямую параллельную BC. В итоге получаем плоскость ANM, площадь которой нам и надо найти. Так же замечаем, что угол SKA это как раз угол β, синус которого нам дан по условию задачи.



Так как основанием правильной треугольной пирамиды является равносторонний треугольник и мы знаем площадь основания, мы можем найти длину стороны основания. Пусть сторона основания равна a. Тогда

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{4\cdot20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}=4\sqrt{5}$$

Зная сторону основания мы при помощи теоремы Пифагора можем найти длину высоты AK

$$AK=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{3}=2\sqrt{15}$$

Точка O – точка пересечения медиан. Следовательно, $OK=\frac{1}{3}AK=\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Зная синус угла β найдем AP

$$\sin\beta=\frac{AP}{AK}\quad\Rightarrow\quad AP=AK\sin\beta=2\sqrt{15}\sqrt{\frac{11}{12}}=2\sqrt{3}\sqrt{5}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}\sqrt{3}}=\sqrt{55}$$

По теореме Пифагора для треугольника AKP найдем PK

$$PK=\sqrt{AK^2-AP^2}=\sqrt{60-55}=\sqrt{5}$$

Зная синус угла β с помощью основанного тригонометрического тождества найдем его косинус

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{11}{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

По определению косинуса острого угла

$$\cos\beta = \frac{OK}{SK} \quad \Rightarrow \quad \frac{OK}{SK} = \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \Rightarrow \quad SK = OK\sqrt{12} = \frac{2}{3}\sqrt{15}\sqrt{12} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{5}$$

Треугольники SMN и SBC подобны по двум углам. Из их подобия следует, что

$$\frac{SP}{SK} = \frac{MN}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{MN}{4\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad MN = 3\sqrt{5}$$

А теперь найдем площадь сечения

$$S = \frac{1}{2}AP \cdot MN = \frac{1}{2}\sqrt{55} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{15}{2}\sqrt{11}$$. **Ответ:** 165.