В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории.
Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.

Если у вас есть более красивые решения отдельных задач – поделитесь! ☺

2017/2018, 1 этап, первый вариант

A1. Вспоминаем определение показательной функции. **Ответ:** 4.

A2. В одном часе 60 минут. Составим пропорцию

$$\begin{matrix} 1\,час - 60\ минут \\ x\ часов - 28\ минут \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1час \cdot 28минут}{60минут} = \frac{28}{60}часа = \frac{14}{30}часа = \frac{7}{15}часа$$

А дальше в столбик. **Ответ:** 2.

A3. Внимательно смотрим на рисунок. Расстояние между точками М и К равно трем радиусам. Следовательно, один радиус равен 4 и их сумма равна 8. **Ответ:** 1.

A4. Пусть ширина участка *a*, длина *b*. Следовательно, $\frac{a}{b} = const \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. Вам осталось только подставить числа и вычислить. **Ответ:** 4.

A5. Под корнем четной степени (это варианты ответов 1, 3, 4 и 5) должно находиться только неотрицательное число. В первом случае отрицательность числа «убивается» четной степенью. А вот в третьем случае мы имеем дело как раз с отрицательным числом под корнем четной степени. Именно это выражение не имеет смысла. Пример решен, но все же проанализируем еще четвертый вариант ответа. В четвертом варианте нечетная степень числа –5 «выплюнет» минус и в итоге мы получим положительное число. **Ответ:** 3.

A6. Подставляем вместо $a_n = 9$ и решаем уравнение

$$9 = \frac{1}{9}(n-7)^2 \quad \Rightarrow \quad 81 = (n-7)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} n-7=9 \\ n-7=-9 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} n=16 \\ n=-2 \end{matrix}$$

Второй вариант ответа не имеет смысла. **Ответ:** 1.

A7. А вот и всеми «любимая» тригонометрия. Однако именно в этом примере ничего сложного нет

$$\mathrm{ctg}\frac{38\pi}{3} = \mathrm{ctg}\left(\frac{36\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{ctg}\left(12\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{ctg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{ctg}\left(120^\circ\right) = \mathrm{ctg}\left(180^\circ - 60^\circ\right) = -\mathrm{ctg}\left(60^\circ\right)$$

Ответ: 5.

A8. Немного помучаемся с преобразованиями

$$\frac{\sqrt{2^7 \cdot 54}}{6x} = \sqrt{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2^7 \cdot 2 \cdot 27}}{6 \cdot \sqrt{12}} = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2^8 \cdot 3 \cdot 9}{4 \cdot 3}} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2^8 \cdot 9}{2^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{2^6 \cdot 9} = \frac{2^3 \cdot 3}{6} = 4$$

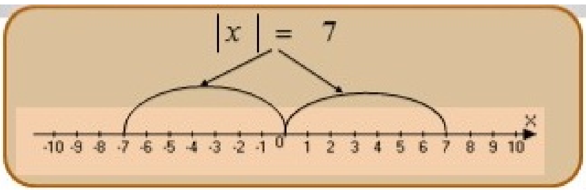
Ответ: 3.

A9. На участке МР координата мотоциклиста изменилась от 75 километров до 135 километров (цена деления оси ординат 15 километров). При этом в точке М он был в момент времени 2,25 часа, а в точке Р в момент времени 3,5 часа. По определению скорость тела равна

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(135-75)\,км}{(3,5-2,25)\,ч} = \frac{60\ км}{1,25\ ч} = 40\ км/ч$$

Ответ: 2.

A10. Немного повторения. Абсолютной величиной (модулем) числа *x* называется расстояние на координатной прямой от точки *x* до начала координат. Например, $|x| = 7$. Это значит, что $x = 7$ и $x = -7$.



Модулем числа x является число x, если $x \ge 0$, и число обратное числу x, если $x < 0$

$$|x| = \begin{cases} x, & если \quad x \ge 0 \\ -x, & если \quad x \le 0 \end{cases}$$

ПРИМЕР. $|117| = 117, \quad |-98| = -(-98) = 98$

Грубая и очень короткая математическая суть модуля: **модуль из любого числа делает не отрицательное число.** То есть если число положительное, то мы модуль можем просто опустить и заменить его скобками. На положительные числа модуль не имеет никакого действия. Если же число отрицательное, то модуль сделает из этого числа положительное. То есть убирая знак модуля и заменяя его скобками мы обязательно **поменяем** знак перед подмодульным выражением на противоположный.

ПРИМЕР. *Раскройте модуль* $\left|\sqrt{8} - 3\right|$.

Что определить знак числа под модулем нам важно понять что больше: 3 или $\sqrt{8}$. Как это выяснить? Возведем во вторую степень 3 и $\sqrt{8}$. Получим $3^2 = 9, \quad \left(\sqrt{8}\right)^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad 3 > \sqrt{8}$. Следовательно, подмодульное выражение отрицательно! Используем определение модуля. Получим $\left|\sqrt{8} - 3\right| = -\left(\sqrt{8} - 3\right) = 3 - \sqrt{8}$

То есть модуль из отрицательного числа $\sqrt{8} - 3$ сделал положительное $3 - \sqrt{8}$.

Возвращаемся к нашему примеру. Так как $x \in (5,5;6)$, то $|x-7| = -(x-7)$ и $|x-5| = x-5$. Дальше сами.

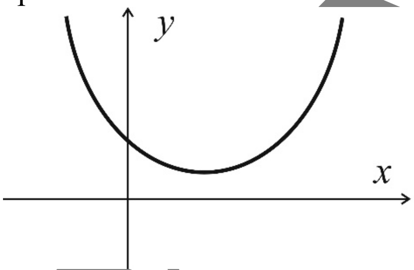
Ответ: 1.

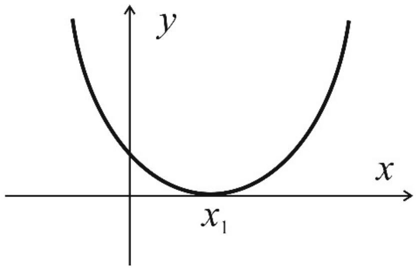
А11. Пусть длина боковой стороны равна основанию. Тогда треугольник будет равносторонним и угол при вершине будет равен 60 градусов. Если боковая сторона больше основания, то угол при вершине должен быть меньше 60 градусов. **Ответ:** 2.

А12. Вспомним немного теории о квадратичных функциях, то есть функциях вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. График такой функции представляет собой параболу. Возможны 6 вариантов графиков таких функций.

Ветви смотрят вверх

Если коэффициент a перед x^2 положителен, то ветви параболы будут смотреть вверх. И тут возможно три подварианта.





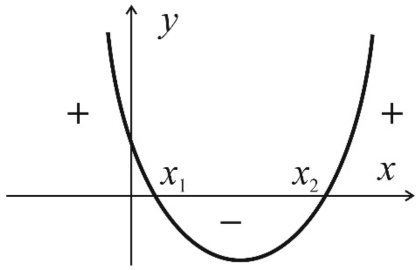


График 1.
Дискриминант отрицателен. График функции никогда не пересечет ось ОХ. Значение такой функции будет всегда положительным.

График 2.
Дискриминант равен нулю. График функции пересекает ось ОХ в одной точке, которая будет являться корнем уравнения. Значение такой функции будет всегда положительным кроме этой одной точки. В этой точке функция обращается в ноль.

График 3.
Дискриминант больше нуля. График функции пересекает ось ОХ в двух точках, которые будут являться корнями уравнения. Значение такой функции будет всегда положительным до первого (наименьшего) корня, потом будет отрицательным до второго корня, после которого опять станет положительным. В точках x_1 и x_2 функция обращается в ноль.

Ветви смотрят вниз

Если коэффициент a перед x^2 отрицателен, то ветви параболы будут смотреть вниз. Тут тоже возможно три подварианта.

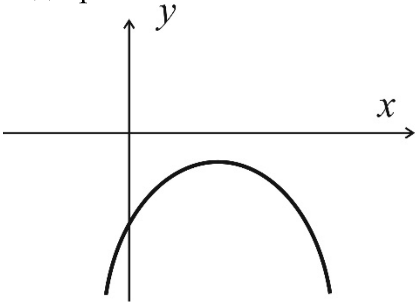


График 4.
Дискриминант отрицателен. График функции никогда не пересечет ось ОХ. Значение такой функции будет всегда отрицательным.

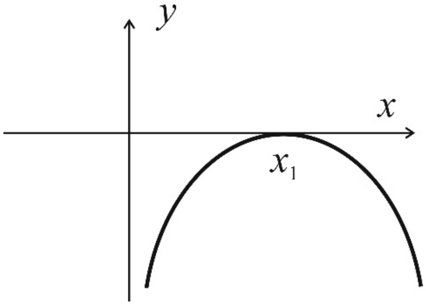


График 5.
Дискриминант равен нулю. График функции пересекает ось ОХ в одной точке, которая будет являться корнем уравнения. Значение такой функции будет всегда отрицательным кроме этой одной точки. В этой точке функция обращается в ноль.

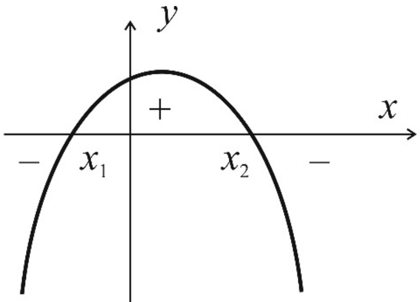


График 6.
Дискриминант больше нуля. График функции пересекает ось ОХ в двух точках, которые будут являться корнями уравнения. Значение такой функции будет всегда отрицательным до первого (наименьшего) корня, потом будет положительным до второго корня, после которого опять станет отрицательным. В точках x_1 и x_2 функция обращается в ноль.

Ну а дальше просто. Смотрим на график и видим, что если $x = 0$, то $y = 4$. Следовательно, выбор будет между вариантами 1 и 5 (подставьте в каждый вариант x=0 и убедитесь в этом сами). Опять смотрим на график. Абсциссы точек пересечения параболы с осью ОХ положительны. Это значит, что корни квадратичного трехчлена так же будут положительными. При помощи теоремы Виета убеждаемся в том, что наш вариант 5.

Ответ: 5.

А13. В ЦТ всегда будут задачи, которые запросто может решить даже филолог. Пусть x стоимость блюдца. Тогда вся сумма покупку будет равна

$$4,05\cdot n+3x=150,30 \;\Rightarrow\; 3x=150,30-4,05\cdot n \;\Rightarrow\; x=\frac{150,30-4,05\cdot n}{3}=50,10-1,35\cdot n$$

Ответ: 4.

А14. Для решения этого задания нам понадобиться метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории. Не игнорируйте его!
Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.
Поняли что–нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $(6–x)(x+3)\le 0$

При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида ($x \pm a$), а не ($a \pm x$) и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже.

У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем –1 из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3)\le 0$$

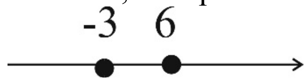
Сокращая на –1 не забываем поменять знак неравенства на противоположный

$$(x-6)(x+3)\ge 0$$

Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступать к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

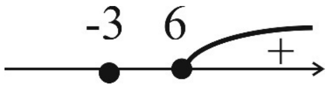
$$x-6=0 \Rightarrow x=6 \text{ и } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.

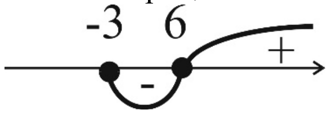


Если все множители неравенства записаны в виде($x \pm a$) и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!!

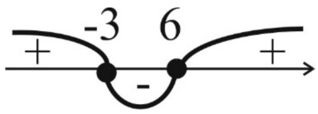
Не верите? Можем проверить. Пусть x=7, тогда $(x–6)(x+3) = (7–6)(7+3)=1\cdot10=10>0 \Rightarrow$ выражение положительно



А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства уникален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный



В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства «≥», то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка: $(–\infty; –3]$ и $[6; +\infty)$.

И еще один пример.

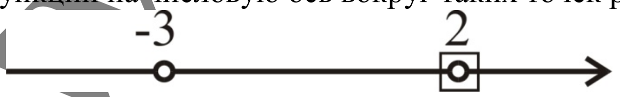
ПРИМЕР: *Найдите наибольшее целое решение неравенства* $(x-2)(x^2+x-6)<0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x_1=-3,\ x_2=2 \Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

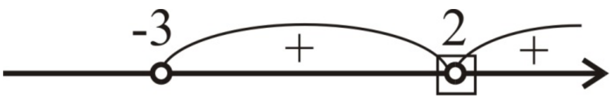
Перепишем неравенство в новом виде: $(x-2)(x-2)(x+3)<0 \Rightarrow (x-2)^2(x+3)<0$

При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.

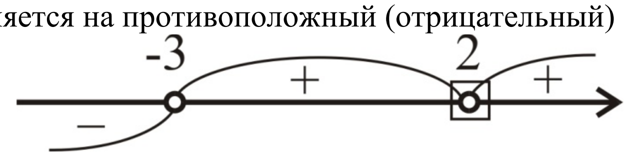


Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно

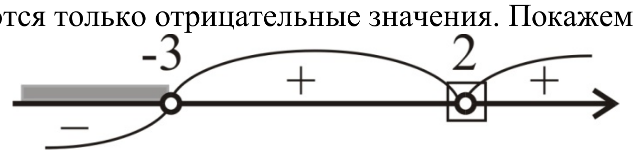
При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение (x – 2) возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!



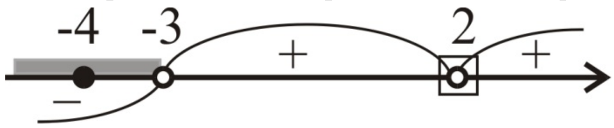
В точке –3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой



Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до –3 (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число –4.



Ответ: –4.

Метод интервалов для рациональных функций можно сформулировать в следующем виде.

1. Привести неравенство к стандартному виду $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$, то есть, чтобы слева была дробь, а справа был ноль.
2. Разложить на множители многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (как мы знаем, для этого придётся решить уравнения $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$). Другими словами надо сделать так, чтобы в числителе и знаменателе дроби были только произведения скобок вида $(x \pm a)$, где a – число. В некотором плане это подобно методы решения уравнений, который мы прошли в первой главе.
3. Нули числителя, не совпадающие с нулями знаменателя, отметить на числовой оси **точками** (если неравенство нестрогое; если строгое – кружочками), а нули знаменателя − **кружочками** (на ноль делить нельзя).

ЕЩЕ РАЗ НАПОМНЮ, ЧТО ЕСЛИ ВСЕ МНОЖИТЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНЫ В ВИДЕ $(x \pm a)$ И НЕТ МИНУСОВ ПЕРЕД СКОБКАМИ, ТО ЗНАЧЕНИЕ ТАКОЙ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ БУДЕТ ВСЕГДА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ!!!

Провести кривую знаков, проходя через все точки, отмеченные на числовой прямой, меняя или не меняя знак в зависимости от степени двучлена, отвечающего данной точке.

4. Записать ответ, обращая особое внимание на граничные точки, часть из которых может быть «выколота».

А теперь вернемся к нашему неравенству. Раскрываем скобки и переносим все слагаемые в левую часть неравенства. Получим

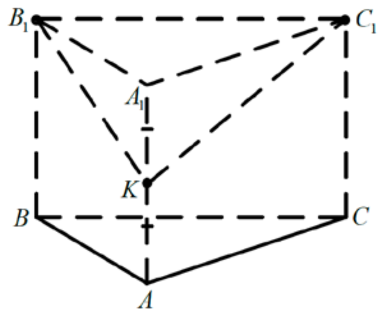
$$x^2 - 10x + 25 < 37 - \left(x^2 - 20x + 100\right) \Rightarrow x^2 - 10x + 25 - 37 + \left(x^2 - 20x + 100\right) < 0 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 30x + 88 < 0 \Rightarrow x^2 - 15x + 44 < 0 \Rightarrow x^2 - 15x + 44 = 0 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = 11 \Rightarrow (x-4)(x-11) < 0$$

Так как знак неравенства «строго меньше», то решения будут лежать между точками 4 и 11 и будут равны 5; 6; 7; 8; 9 и 10.

Ответ: 3.

А15. Обязательно изображаем на рисунке призму и сечение. Если призма правильная, то у нее в основании лежит равносторонний треугольник. Следовательно, сечение будет представлять собой равносторонний треугольник. Его периметр будет равен



$$P = B_1K + KC_1 + B_1C_1 = x + x + 9 = 2x + 9$$

По теореме Пифагора для треугольника B_1A_1K найдем B_1K

$$B_1K = \sqrt{\left(\frac{A_1K}{2}\right)^2 + \left(B_1A_1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 + 9^2} = \frac{19}{2} = x$$

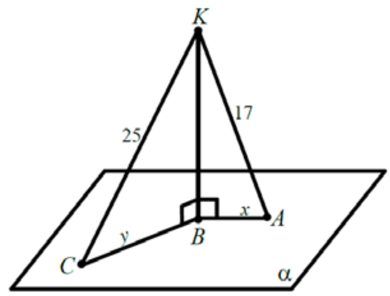
Периметр вычислите самостоятельно. **Ответ:** 5.

А16. Фигура на рисунке состоит из 13 квадратиков. Следовательно, ее площадь равна 13 см^2 и составляет 104 % от площади трапеции. Составим пропорцию

$$\begin{matrix} 13\,см^2 - 104\,\% \\ S\,см^2 - 100\,\% \end{matrix} \Rightarrow S = \frac{13\,см^2 \cdot 100\,\%}{104\,\%} = 12{,}5\,см^2$$

Ответ: 1.

А17. Очень простая задача. Пусть AB=x, CB=y, KB=z. По условию задачи $y - x = 12$. Треугольники KBA и KBC прямоугольные. Запишем для них теорему Пифагора



$$\begin{cases} 17^2 = x^2 + z^2 \\ 25^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$$

А теперь нам надо всего лишь решить систему уравнений. Вычтем из второго уравнение первое. При этом внимательно следите за преобразованиями

$$25^2-17^2=y^2+z^2-\left(x^2+z^2\right) \Rightarrow (25-17)(25+17)=y^2-x^2 \Rightarrow 8\cdot 42=(y-x)(y+x)$$

Так как $y-x=12$, то $8\cdot 42=12(y+x) \Rightarrow x+y=28$. А теперь запишем новую систему, которую мы решим методом сложения

$$\begin{cases} y-x=12 \\ y+x=28 \end{cases} \Rightarrow y+x+y-x=28+12 \Rightarrow y=20$$

Подставим это значение в теорему Пифагора для треугольника KBC

$$25^2=y^2+z^2 \Rightarrow z=\sqrt{25^2-20^2}=\sqrt{(25-20)(25+20)}=\sqrt{5\cdot 45}=\sqrt{5\cdot 5\cdot 9}=5\cdot 3=15$$

Ответ: 4.

A18. При решении тригонометрических уравнений очень важно видеть не очевидные преобразования. Например, в этом уравнении мы должны увидеть следующее

$$2=2\cdot 1=2\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\sin^2 x+2\cos^2 x$$

Подставим это преобразование в наше уравнение

$$\sin^2 x-5\sin x\cos x+2=0 \Rightarrow \sin^2 x-5\sin x\cos x+2\sin^2 x+2\cos^2 x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sin^2 x-5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$$

А теперь разделим каждое слагаемое на $\cos^2 x$

$$3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-5\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}+2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0 \Rightarrow 3\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2-5\frac{\sin x}{\cos x}+2=0 \Rightarrow 3(\mathrm{tg}x)^2-5\mathrm{tg}x+2=0$$

Сделаем замену $\mathrm{tg}x=t \Rightarrow 3t^2-5t+2=0 \Rightarrow t_1=1,\quad t_2=2/3$. Нам надо найти наибольший отрицательный корень.

Тангенс какого угла равен 2/3? И я не знаю. Это не табличная величина. Однако мы знает, что $\mathrm{tg}45^\circ=1$. Это значит, что угол, тангенс которого равен 2/3, будет чуть меньше 45°. Пусть он равен 40° (на самом деле точное значение нам не принципиально). По условию задачи нам надо найти наибольший отрицательный корень. Мы знаем, что тангес функция периодическая, с периодом равным π. Поэтому отнимем от корней 180°. Получим -135° и -140°. Получаем, что наибольший отрицательный угол, тангенс которого равен 1, равен -135°.

Ответ: 2.

Часть B

B1. Уравнение окружности имеет вид $R^2=\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2$, где ($x_0$, y_0) – координата центра окружности. Таким образом, мы сразу можем узнать радиус окружности и координату центра окружности. Длину окружности мы легко вычислим зная радиус окружности. Осталось найти расстояние между центром окружности и точкой M. Как это сделать вы можете узнать самостоятельно в любом справочнике (или в гугле). Ищите тему «Расстояние между точками на координатной плоскости» (маленькая подсказка – вам поможет теорема Пифагора). Небольшие подсказки.

1. Чтобы окружность проходила через начало координат ее радиус должен быть равен расстояние между центром окружности и точкой с координатами (0;0).
2. Длина отрезка KP будет равна KP = 1 – (–7) = 8 (она равна разности абсцисс; ордината у точек одинаковая).

Ответ: А3Б4В5.

B2. Чтобы правильно решить эту задачу надо знать свойства функции y=sin*x*. Читайте гугл или учебник.

Ответ: 146.

B3. Решение задач на работу аналогично решению задач на движение. Вы просто заменяйте скорость движения на производительность труда, а пройденный путь на совершенную работу. Пусть производительность труда первого ризографа равна x, а второго y. Тогда их совместная работа описывается уравнением (время подставим в часах)

$$A=(x+y)\cdot\frac{20}{60}$$

По условию задачи первый ризограф выполнил всю работу за 45 минут

$$A=(x)\cdot\frac{45}{60}\;\Rightarrow\; x=\frac{4}{3}A$$

Подставим производительность труда первого ризографа в уравнение для совместной работы

$$A=(x+y)\cdot\frac{1}{3}\;\Rightarrow\; A=\left(\frac{4}{3}A+y\right)\cdot\frac{1}{3}\;\Rightarrow\; A=\frac{4}{3}A\cdot\frac{1}{3}+y\cdot\frac{1}{3}\;\Rightarrow\; A-\frac{4}{9}A=\frac{y}{3}\;\Rightarrow\;\frac{5}{9}A=\frac{y}{3}\;\Rightarrow\; y=\frac{5}{3}A$$

А теперь найдем время выполнения всей работы вторым ризографом

$$t=\frac{A}{y}=\frac{A}{\frac{5}{3}A}=\frac{3}{5}(\text{часа})=\frac{3}{5}\cdot 60(\text{минут})=36(\text{минут})$$

Ответ: 36.

В4. Вам показалось это задание странным? На самом деле это всего лишь система из двух уравнений. Просто подставим вместо b предложенные нам числа и запишем два уравнения, которые и станут нашей системой

$$6b^3+ab^2-4b+c\;\Rightarrow\;\begin{cases}6(-3)^3+a(-3)^2-4(-3)+c=0\\ 6(2)^3+a(2)^2-4(2)+c=0\end{cases}\;\Rightarrow\;\begin{cases}-162+9a+12+c=0\\ 48+4a-8+c=0\end{cases}$$

Эту систему можно решить и методом подстановки (выразить c из первого уравнений и подставить во второе) и методом вычитания. Поэтому дальше сами.

Ответ: –154.

В5. Простое иррациональное уравнение. Главное в иррациональном уравнении это проверить корни уравнения, так как очень часто будут появляться посторонние корни. Если корни целые числа, то лучше проверить их подстановкой в само уравнение. Если нет, то необходимо проверить их по ОДЗ. Сделаем замену и немного преобразуем наше уравнение. Пусть $x^2=t$. Тогда

$$t-3\sqrt{t-15}=33\;\Rightarrow\; t-33=3\sqrt{t-15}$$

Не забывайте проверить неотрицательность той части, которая не находиться под корнем, так как при возведении во вторую степень эта часть уравнения может поменять знак. Таким образом получаем, что $t-33\ge 0\;\Rightarrow\; t\ge 33$. А теперь возведем во вторую степень левую и правую части уравнения

$$(t-33)^2=\left(3\sqrt{t-15}\right)^2\;\Rightarrow\; t^2-66t+1089=9(t-15)\;\Rightarrow\; t^2-75t+1224=0\;\Rightarrow\;\begin{matrix}t_1=51\\ t_2=24\end{matrix}$$

Второй корень не подходит по ОДЗ ($t\ge 33$). Дальше все просто

$$x^2=t\;\Rightarrow\; x^2=51\;\Rightarrow\;\begin{matrix}x_1=\sqrt{51}\\ x_2=-\sqrt{51}\end{matrix}\;\Rightarrow\; x_1\cdot x_2=\sqrt{51}\cdot\left(-\sqrt{51}\right)=-51.$$

При решении этого примера можно сделать и более сложную замену. Для этого немного преобразуем уравнение. Так как $-33=-15-18$, то

$$x^2-3\sqrt{x^2-15}=33\;\Rightarrow\; x^2-15-3\sqrt{x^2-15}-18=0\;\Rightarrow\;\left(\sqrt{x^2-15}\right)^2-3\sqrt{x^2-15}-18=0$$

Дальше попробуйте решить самостоятельно.

Ответ: –51.

В6. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведенную к этому основанию. Высота у нас есть. Надо найти основание. При этом не забываем, что у параллелограмма противоположные стороны параллельны и равны. Рассмотрим треугольник ВКС. Так как угол ВСК = 30^o, то $BC=2BK=6$. Значит площадь параллелограмма равна $S=BE\cdot AD=6\cdot 6=36$

Ответ: 36.

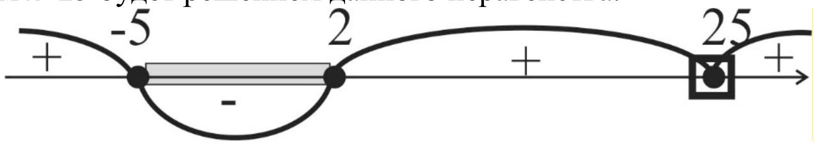
В7. Настоятельно рекомендую еще раз внимательно почитать теорию к задаче А14!!! Для решения этого неравенства нам надо будет вспомнить, что $\left(|a|\right)^2=a^2$ и $(ab)^2=a^2b^2$. Преобразуем неравенство

$$\left((x+3)|x-25|\right)^2 \le (3x+19)(x-25)^2 \Rightarrow (x+3)^2(x-25)^2-(3x+19)(x-25)^2 \le 0 \Rightarrow$$

$$(x-25)^2\left((x+3)^2-(3x+19)\right) \le 0 \Rightarrow (x-25)^2\left(x^2+6x+9-3x-19\right) \le 0 \Rightarrow$$

$$(x-25)^2\left(x^2+3x-10\right) \le 0 \Rightarrow (x-25)^2(x+5)(x-2) \le 0$$

Рисуем числовую ось и наносим на нее нули неравенства. Не забываем, что в точке x=25 смена знака не происходит!!! При этом x=25 будет решением данного неравенства.



Решениями неравенства будут числа –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2 и 25.

Ответ: 13.

B8. Нужную нам площадь мы найдем как разность всей площади поверхности и площадей не нужных нам граней

$$S_{SAC}+S_{SBC}=S_{ABCS}-S_{SBA}-S_{ABC}$$

Площади граней SBA и ABC найдем по формуле Герона.

$$p_{SBA}=\frac{13+13+10}{2}=18 \Rightarrow S_{SBA}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)}=60$$

$$p_{ABC}=\frac{21+10+17}{2}=24 \Rightarrow S_{ABC}=\sqrt{24(24-21)(24-10)(24-17)}=84$$

Окончательно получаем

$$S_{SAC}+S_{SBC}=S_{ABCS}-S_{SBA}-S_{ABC}=263-60-84=119$$

Ответ: 119.

B9. Функция называется нечетной если $f(-x)=-f(x)$. Применим это свойство к нашей задаче.

$$f(-3)-f(-6)=-f(3)-(-f(6))=-f(3)+f(6)$$

А теперь просто найдем значение нашей функции в точках 3 и 6 и подставим в последнее выражение

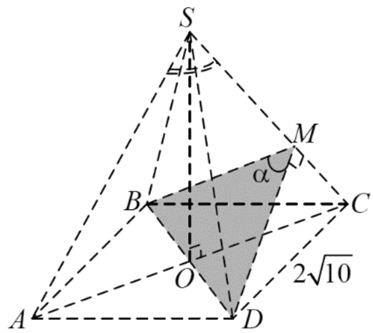
$$f(3)=4x-x^2=4\cdot 3-3^2=3, \quad f(6)=4x-x^2=4\cdot 6-6^2=-12$$

Окончательно получаем

$$f(-3)-f(-6)=-f(3)+f(6)=-3-12=-15$$

Ответ: –15.

B10. Находить линейный угол двугранного угла при боковом ребре SC будем находить по теореме косинусов из треугольника BMD



$$BD^2=BM^2+MD^2-2BM\cdot MD\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{BM^2+MD^2-BD^2}{2BM\cdot MD},$$

где DM и BM перпендикулярны SC.

Так как в основании пирамиды лежит квадрат, то BD мы легко найдем при помощи теоремы Пифагора для треугольника BCD

$$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2+\left(2\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

Для того, чтобы найти BM=MD, нам надо рассмотреть прямоугольный треугольник SOC. В этом треугольнике OC=0,5AC=0,5BD, $\angle OSC=0{,}5\angle ASB \Rightarrow \angle OSC=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. Высота SO треугольника SOC будет равна: $\operatorname{tg}(\angle OSC)=\frac{OC}{SO} \Rightarrow SO=\frac{OC}{\operatorname{tg}(\angle OSC)}=\frac{0{,}5\cdot 4\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=4$

По теореме Пифагора найдем длину бокового ребра пирамиды

$$SC=\sqrt{SO^2+OC^2}=\sqrt{4^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}=6$$

Рассмотрим треугольник SDC. Найдем высоту, опущенную на сторону DC. Так как треугольник равнобедренный, то высота будет и медианой и разделит основание на два равных отрезка (рисунок сделайте самостоятельно). Пусть высота равна SF. Тогда запишем теоремы Пифагора для треугольника SFC

$$SC^2=SF^2+FC^2 \;\Rightarrow\; SF^2=SC^2-FC^2 \;\Rightarrow\; SF=\sqrt{SC^2-FC^2}=\sqrt{6^2-\left(\sqrt{10}^2\right)}=\sqrt{26}$$

Площадь треугольника SDC равна

$$S_{SDC}=\frac{1}{2}DC\cdot SF \text{ или}$$

$$S_{SDC}=\frac{1}{2}SC\cdot DM \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}SC\cdot DM=\frac{1}{2}DC\cdot SF \;\Rightarrow\; DM=\frac{DC\cdot SF}{SC}=\frac{2\sqrt{10}\cdot\sqrt{26}}{6}=\frac{2\sqrt{65}}{3}$$

Осталось только подставить DM=BM и BD с формулу для нахождения косинуса. Сделайте это самостоятельно. И перед тем как записать ответ не забудьте освежить в памяти задание.
Ответ: –20.

B11. Ниже будет немного теории о прогрессиях.
Пусть у нас имеется последовательность чисел –3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18. Очевидно, что каждое последующее число больше предыдущего числа на 3 и дальше пойдут числа 21, 24, 27 и т.д.
Арифметическая прогрессия – числовая последовательность вида

$$a_1,\; a_1+d,\; a_1+2d,\; \dots,\; a_1+(n-1)d,\; \dots$$

где d – разность прогрессии. У нас она равна 3. То есть каждое последующее число больше (если прогрессия возрастающая) или меньше (если прогрессия убывающая) предыдущего на величину d.
Разность прогрессии в общем случае находится как $d=a_2-a_1$ или $d=a_5-a_4$ или $d=a_n-a_{n-1}$.
Если $d>0$ – прогрессия возрастающая, $d<0$ – прогрессия убывающая.
Каждому члену прогрессии соответствует свой номер $a_1=-3,\; a_2=0,\; a_3=3$ и т.д.
n–й член арифметической прогрессии равен $a_n=a_1+(n-1)d$. Например $a_7=a_1+(7-1)d=a_1+6d$.
Если в условии задачи сказано, что числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то это означает равенство $2b=a+c$. Это равенство следует из определения разности прогрессии

$$d=b-a=c-b \;\Rightarrow\; b-a=c-b \;\Rightarrow\; 2b=a+c$$

Запоминаем последнее свойство. Оно нам понадобиться при решении задачи.
Перейдем к геометрическим прогрессиям. Рассмотрим последовательность чисел 3, –6, 12, –24, 48 …
Каждый последующий член получается умножением предыдущего члена на одно и тоже число. Такая последовательность называется геометрической прогрессией. Геометрической прогрессией называется последовательность чисел $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, для которой имеют место соотношения:

b_1 – заданное число, первый член прогрессии; $b_n=b_{n-1}\,q$ – n–й член прогрессии ($n\geq 2$);
q – знаменатель прогрессии ($q\neq 1$).

$$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\dots=\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Формула n–го члена прогрессии: $b_n=b_1q^{n-1}$.
Если три числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию в указанном порядке, то $y^2=zx$ или в общем виде $b_k^2=b_{k-p}b_{k+p}\quad (p<k)$; $\quad b_k^2=b_{k-1}b_{k+1}\quad (k\geq 2)$
И опять запоминаем свойство, так как нам оно тоже пригодиться при решении задачи.
А теперь возвращаемся к задаче. По условию

$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ b+c+d=16\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Поработаем с первым уравнением. Числа a, b и c – члены арифметической прогрессии. Поэтому у нас будет два уравнения. Первое – условие задачи, второе – свойство арифметической прогрессии.

$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ 2b=a+c \end{cases}$$

Решим эту систему

$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ 2b=a+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=9-b \\ a+c=2b \end{cases} \Rightarrow 2b=9-b \Rightarrow 3b=9 \Rightarrow b=3$$

А теперь поговорим о числах *b, c* и *d*. Эти числа в указанном порядке являются членами геометрической прогрессии. Следовательно, $c^2=bd$. Учитывая последнее сjотношение и то, что $b=3$, получим систему

$$\begin{cases} c+d=13\frac{1}{3} \\ c^2=3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=13\frac{1}{3}-c \\ c^2=3d \end{cases} \Rightarrow c^2=3\left(13\frac{1}{3}-c\right) \Rightarrow c^2=3\left(\frac{40}{3}-c\right) \Rightarrow c^2+3c-40=0$$

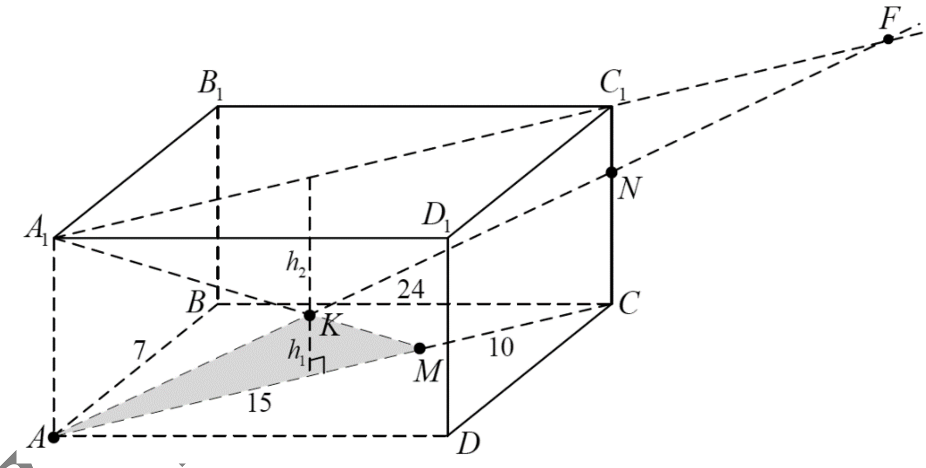
Решая квадратное уравнение находим c=5. Значит, $d=16\frac{1}{3}-b-c=8\frac{1}{3}$.

Окончательно получаем

$$(a+b+c+d)\cdot 3=((a+b+c)+d)\cdot 3=\left(9+\frac{25}{3}\right)\cdot 3=27+25=52$$

Ответ: 52.

B12. Чтобы найти объем прямоугольного параллелепипеда нам надо знать его высоту (стороны основания мы знаем по условию).
По условию задачи AM:MC=3:2. Пусть AC=5x. Тогда AM=3x, MC=2x.
По условию задачи $C_1N:NC=1:2$. Пусть $C_1C=3y$. Тогда $C_1N=y$, $NC=2y$.
Рассмотрим треугольники FC_1N и FA_1A. Эти треугольники подобны (они подобны по трем углам). Пусть $FC_1=a$. Из их подобия следует



$$\frac{a}{y}=\frac{a+5x}{3y} \Rightarrow 3a=a+5x \Rightarrow a=2,5x$$

Рассмотрим другую пару треугольников: A_1FK и AKN. Эти треугольники так же подобны (опять же по трем углам). В подобных треугольниках не только отношение сторон равно коэффициенту подобия, но и отношения высот

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{A_1F}{AM} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1}=\frac{7,5x}{3x}=2,5 \Rightarrow h_2=2,5h_1$$

Так как площадь треугольника AKM равна 45, то

$$S_{AKM}=\frac{1}{2}AM\cdot h_1 \Rightarrow h_1=\frac{S_{AKM}}{\frac{1}{2}AM}=\frac{45}{15\cdot 0,5}=6$$

А теперь найдем высоту параллелепипеда

$$H=h_1+h_2=2,5h_1+h_1=3,5h_1=3,5\cdot 6=21$$

Значит объем параллелепипеда равен

$$V=AB\cdot BC\cdot H=7\cdot 24\cdot 21=3528.$$

Ответ: 3528.