

В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории.

Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.

Если у вас есть более красивые решения отдельных задач – поделитесь! ☺

2015/2016, 2 этап, первый вариант

A1. При решении этой задачи я ничем не могу вам помочь ☺

Ответ: 1.

A2. Преобразуем каждое из неравенств.

1. Сразу не подходит (догадайтесь сами почему).

2. При умножении (делении) правой и левой части неравенства на отрицательное число мы обязаны поменять знак неравенства на противоположный. Следовательно, $\frac{a}{-2} > \frac{b}{-2} \Rightarrow a < b$

3. $a - 2 > b - 2 \Rightarrow a > b$ – подходит.

На всякий случай проверим остальные

4. Помним про сокращение на отрицательное число!!! $-2a > -2b \Rightarrow a < b$

5. Очевидно, что не подходит.

Ответ: 3.

A3. Вспомним свойства углов при параллельных прямых и секущей. Так как прямые a и b параллельны, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \Rightarrow \angle 2 = 180 - \angle 1$.

Ответ: 2.

A4. Так как величины a и b прямо пропорциональные, то $\frac{a}{b} = \text{const}$. Возьмем данные из таблицы

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{30}{3\frac{3}{4}} = \frac{13}{b_2} \Rightarrow b_2 = \frac{13 \cdot 3\frac{3}{4}}{30} = \frac{13 \cdot \frac{15}{4}}{30} = \frac{13 \cdot 15}{30 \cdot 4} = \frac{13}{8} = \frac{8+5}{8} = 1\frac{5}{8}$$

Ответ: 5.

A5. Немного теории. Степенью числа a с показателем n (a принадлежит рациональным числам, n – натуральным), называется произведение числа a на число a n раз: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$. Число a – основание степени, n – показатель степени. **Повторим свойства степени.**

1. Степень произведения двух или нескольких сомножителей равна произведению степеней этих сомножителей с тем же показателем: $(abc)^n = a^n b^n c^n$

И наоборот, произведение одинаковых степеней нескольких величин равно той же степени произведения этих величин: $a^n b^n c^n \dots = (abc \dots)^n$

На практике это свойство применяется, когда основание степени достаточно большое число. Например, у нас есть число 35^6 . Согласно этому свойству $35^6 = (5 \cdot 7)^6 = 5^6 \cdot 7^6$. Ну а дальше обычно находятся числа, с которыми мы «подружим» получившихся два множителя.

2. Если у нас есть в степени дробь, то она действует как на числитель так и на знаменатель $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются: $a^m a^n = a^{m+n}$ или $a^m a^{-n} = a^{m-n}$. Например, $x^{10} x^9 = x^{10+9} = x^{19}$ или $x^{10} x^{-9} = x^{10-9} = x^1 = x$

4. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ или } \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

Примеры. $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$, $\frac{x^7}{x^{-2}} = x^{7-(-2)} = x^{7+2} = x^9$ $8x^{\frac{5}{6}} : 4x^{-\frac{2}{3}} = \frac{8x^{\frac{5}{6}}}{4x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2x^{\frac{5}{6}}}{x^{-\frac{2}{3}}} = 2x^{\frac{5}{6}-\left(-\frac{2}{3}\right)} = 2x^{\frac{3}{2}}$

5. При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются: $(a^m)^n = a^{mn}$

Пусть у нас есть число 48^6 . Используем свойство 1 и свойство 5 чтобы записать его в человеческом виде

$$48^6 = (3 \cdot 16)^6 = 3^6 \cdot 16^6 = 3^6 \cdot (2^4)^6 = 3^6 \cdot 2^{4 \cdot 6} = 3^6 \cdot 2^{24}$$

6. $a^0 = 1$

7. $a^1 = a$

8. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ и наоборот $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Ну а дальше все просто. Надо просто увидеть преобразования и воспользоваться свойствами

$$\frac{27^{-4} \cdot 9^3 \cdot 6}{18 \cdot 3^2} = \frac{(3^3)^{-4} \cdot (3^2)^3 \cdot 6}{6 \cdot 3 \cdot 3^2} = \frac{3^{-12} \cdot 3^6}{3^3} = 3^{-12+6-3} = 3^{-9}$$

Ответ: 1.

A6. Смотрим внимательно на рисунок. SK – высота равнобедренного треугольника BSC. По теореме Пифагора $SK^2 = SC^2 - KC^2 \Rightarrow SK^2 = 8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55 \Rightarrow SK = \sqrt{55}$. Отрезок PK – средняя линия треугольника ABC. Следовательно, $PK = \frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Таким образом, длина ломаной будет равна $ASKP = AS + SK + KP = 8 + \sqrt{55} + 3 = 11 + \sqrt{55}$.

Ответ: 2.

A7. Пусть у нас имеется последовательность чисел $-3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18$.

Очевидно, что каждое последующее число больше предыдущего числа на 3 и дальше пойдут числа 21, 24, 27 и т.д.

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность вида

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$$

где d – разность прогрессии. У нас она равна 3. То есть каждое последующее число больше (если прогрессия возрастающая) или меньше (если прогрессия убывающая) предыдущего на величину d .

Разность прогрессии в общем случае находится как

$$d = a_2 - a_1 \text{ или } d = a_5 - a_4 \text{ или } d = a_n - a_{n-1} \text{ или } a_n = a_{n-1} + d.$$

Если $d > 0$ – прогрессия возрастающая, $d < 0$ – прогрессия убывающая.

Каждому члену прогрессии соответствует свой номер

$$a_1 = -3, a_2 = 0, a_3 = 3 \text{ и т.д.}$$

n -й член арифметической прогрессии равен

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Например

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_7 = a_1 + (7-1)d = a_1 + 6d$$

то есть чтобы найти второй член прогрессии надо к первому добавить одну разность прогрессии, чтобы найти седьмой – надо к первому прибавить шесть разностей прогрессии.

Раскроем скобки в формуле для n -го члена арифметической прогрессии. Получим

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = a_1 + nd - d$$

Из формулы видно, что коэффициент при n равен разнице прогрессии.

У этой задачи есть еще один способ решения. Найдя первый и второй члены прогрессии мы всегда можем найти разность прогрессии.

$$1) a_1 = 4 - 21 = 2; a_2 = 4 - 22 = 0 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -2.$$

$$2) a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = -1; a_2 = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 3.$$

$$3) a_1 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}; a_2 = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = \frac{1}{4}.$$

4) $a_1 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$; $a_2 = 4 \cdot 2 - 2 = 8 - 2 = 6 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 4$.

5) $a_1 = 2 - 4 \cdot 1 = -2$; $a_2 = 2 - 4 \cdot 2 = -6 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -4$.

Получаем аналогичный ответ.

Ответ: 4.

A8. Область значений – это значения, которые принимает функция. Смотрим на график. $y = -1$ включена, $y = 2$ – пустая точка, $y = 3$ – пустая точка, $y = 6$ – включена. Получаем $y \in [-1; 2) \cup (3; 6]$. И не забываем про точку $(-2; -3)$, которые составители РТ ловко прячут от нас.

Ответ: 5.

A9. Самостоятельно сделайте рисунок!!! Сделайте небольшое дополнительное построение. Опустите высоту CK на гипотенузу. Так как $\angle A = 30^\circ$, то $CB = 4$. По теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}.$$

Площадь треугольника постоянна вне зависимости от того, по какой формуле мы ее находим. С одной стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB$. С другой стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK$. Следовательно,

$$\frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} AB \cdot CK \Rightarrow CK = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{8} = 2\sqrt{3}.$$

Рассмотрим треугольник CKB . Так как $KB = 2$. Следовательно, $AK = 6$. По свойству высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, получаем

$$CK^2 = AK \cdot KB \Rightarrow CK = \sqrt{AK \cdot KB} = \sqrt{2 \cdot 6} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: 4.

A10. Процентом (лат. pro centum – с сотни) называется сотая часть целого. 1 % это сотая часть числа.

Например, 2 % от числа 25 находится как $\frac{2\%}{100\%} \cdot 25 = 0,5$. Однако можно и по–другому. Сначала находим сколько составляет один процент от 25 и потом умножаем это значение на 2 процента $\frac{25}{100\%} \cdot 2\% = 0,5$. Есть и третий способ. Составим пропорцию и решим ее

$$\frac{25 - 100\%}{x - 2\%}$$

Какие рассуждения вам более понятны такие и используйте при решении задач. На мой же взгляд вариант с пропорцией дает меньший шанс на ошибку.

По условию задачи $S_{\text{ячменя}} - S_{\text{овса}} = 140$ га. Составим пропорцию

$$\frac{\text{Ячмень} - 37,5\%}{\text{Овес} - 17,5\%} \Rightarrow \Delta = 20\% \Rightarrow 140 \text{ га} - 20\% \Rightarrow 1\% = 7 \text{ га.}$$

Из рисунка находим процент площади отведенной под пшеницу

$$S_{\text{пшеницы}} = 100\% - 37,5 - 17,5 - 15 = 30\% \Rightarrow S_{\text{пшеницы}} = 30 \cdot 7 \text{ га} = 210 \text{ га.}$$

Ответ: 3.

A11. Площадь фигуры найдем как разность площадей.

У нас есть прямоугольник $ABCE$ и треугольник ECD . Их суммарная площадь будет равна

$$S = S_{ABCE} + S_{ECD} = AE \cdot AB + \frac{1}{2} EC \cdot h = (4 \cdot 2) \cdot (8 \cdot 2) + \frac{1}{2} (8 \cdot 2)(3 \cdot 2) = 128 + 48 = 176$$

При расчетах помним, что одна клетка равна 2 см!!!

С правой и левой стороны от фигуры «откусим» по половине окружности. Радиус окружности равен $(2 \cdot 2) = 4$ см. Площадь окружности будет равна $S_{\text{окр}} = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$. Площадь фигуры равна

$$S = 176 - 16\pi.$$

Ответ: 5.

A12. Разделим двойное неравенство на два и решим каждое в отдельности. Таким образом, у нас получится система из двух неравенств. Решим первое неравенство

$$6 \leq \frac{3x-7}{5} - \frac{3x-2}{2} \Rightarrow 6 \cdot 5 \cdot 2 \leq 2(3x-7) - 5(3x-2) \Rightarrow 60 \leq 6x - 14 - 15x + 10 \Rightarrow 9x \leq -64 \Rightarrow x \leq \frac{-64}{9}$$

А теперь второе

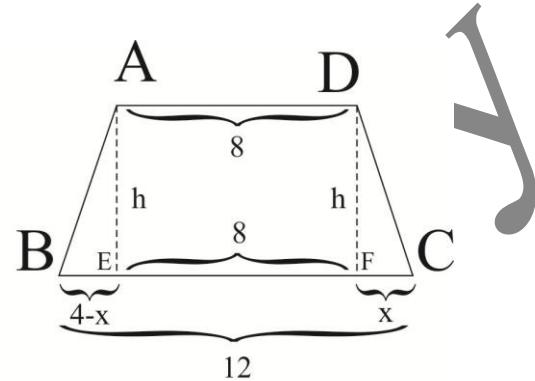
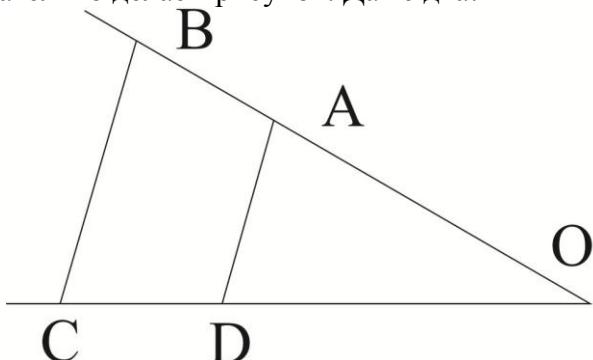
$$\frac{3x-7}{5} - \frac{3x-2}{2} < 8 \Rightarrow 2(3x-7) - 5(3x-2) < 8 \cdot 5 \cdot 2 \Rightarrow 6x - 14 - 15x + 10 < 80 \Rightarrow -84 < 9x \Rightarrow x > \frac{-84}{9}$$

Объединим два неравенства в одно

$$\frac{-84}{9} < x \leq \frac{-64}{9} \Rightarrow -9,3 < x \leq -7,1 \Rightarrow x = -8.$$

Ответ: 3.

A13. Обязательно делаем рисунок. Даже два!



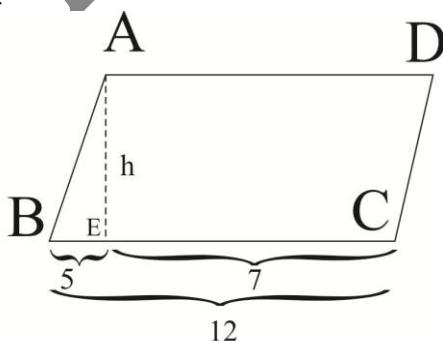
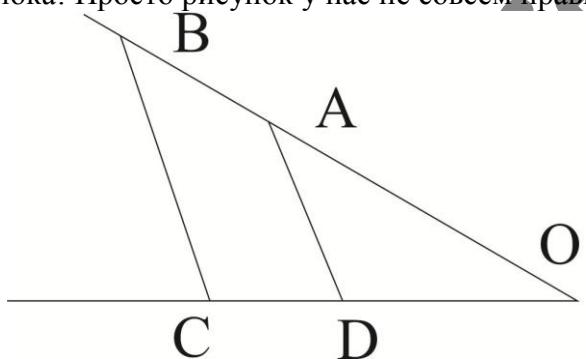
Из $\triangle AEB$ и $\triangle DCF$ выразим высоты h и приравняем. Получим

$$\begin{aligned} h^2 &= AB^2 - (4-x)^2 \Rightarrow AB^2 - (4-x)^2 = DC^2 - x^2 \\ h^2 &= DC^2 - x^2 \end{aligned}$$

Подставим числа

$$100 - (16 - 8x + x^2) = 76 - x^2 \Rightarrow x = -1.$$

Это не ошибка! Просто рисунок у нас не совсем правильный.



А теперь все просто

$$\cos \alpha = \cos(\angle ABE) = \frac{BE}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Так же хочу представить вашему вниманию еще один способ решения данной задачи, которым поделился со мной репетитор по математике Владимир Лазовский.

A13. II сп. Проведем $AE \parallel DC$.

1) $EACD$ – параллелограмм ($EA = CD = 8$, $EA = CD = 2\sqrt{19}$). $BE = 12 - 8 = 4$.

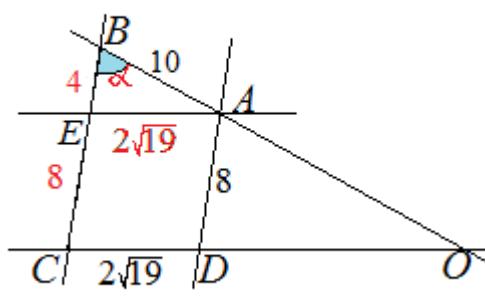
2) $\triangle EBA$ (по теореме косинусов):

$$(2\sqrt{19})^2 = 4^2 + 10^2 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cos \alpha.$$

$$76 = 16 + 100 - 80 \cos \alpha.$$

$$80 \cos \alpha = 116 - 76.$$

$$\cos \alpha = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}.$$



Ответ: 3.

A14. Время движения первого велосипедиста равно $t_1 = \frac{S}{a}$. Время движения второго $t_2 = \frac{S}{b}$. По условию задачи

$$t_1 - t_2 = t \Rightarrow \frac{S}{a} - \frac{S}{b} = t \Rightarrow S \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = t \Rightarrow S = \frac{t}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{t}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{t ab}{b-a}$$

Ответ: 2.

A15. Преобразования надо научиться видеть! В числителе у нас формула сокращенного умножения (квадрат разности). Знаменатель разложим при помощи корней

$$4a^2 + 11a - 3 = 0 \Rightarrow D = b^2 - 4ac = 11^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 121 + 48 = 169 = 13^2$$

$$a = \frac{-11 \pm 13}{2 \cdot 4} \left\langle \begin{array}{l} \frac{-11 - 13}{8} = \frac{-24}{8} = -3 \\ \frac{-11 + 13}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Rightarrow 4a^2 + 11a - 3 = 4(a - (-3)) \left(a - \frac{1}{4} \right) = (a + 3)(4a - 1).$$

Окончательно получаем

$$\frac{16a^2 - 8a + 1}{4a^2 + 11a - 3} = \frac{(4a - 1)^2}{(a + 3)(4a - 1)} = \frac{4a - 1}{a + 3}.$$

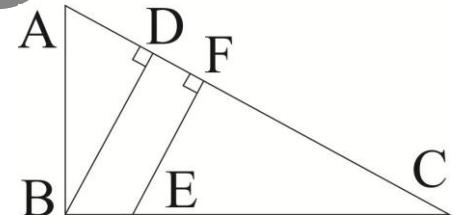
Ответ: 4.

A16. Пусть $AD = 9x$, $DC = 40x$. Используем свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе

$$BD^2 = AD \cdot DC \Rightarrow (4\sqrt{5})^2 = 9x \cdot 40x \Rightarrow x^2 = \frac{16 \cdot 5}{9 \cdot 40} = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Так как треугольник ABC и CEF подобны (по трем углам), то

$$\frac{AB}{EF} = k$$



По условию задачи отношение площадей треугольников равно 2. Следовательно,

$$k^2 = 2 \Rightarrow k = \sqrt{2}.$$

Сторону AB мы найдем по теореме Пифагора для треугольника ADB . А теперь найдем длину отрезка EF

$$EF = \frac{AB}{k} = \frac{\sqrt{AD^2 + BD^2}}{k} = \frac{\sqrt{(9x)^2 + (4\sqrt{5})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 5 + 9 \cdot 2}}{\sqrt{2}} = 7.$$

Ответ: 1.

A17. Вспоминаем формулы приведения

$$\frac{16 \sin(270^\circ - 19^\circ) - 10 \cos(180^\circ - 19^\circ)}{\cos 19^\circ} = \frac{16(-\cos 19^\circ) - 10(-\cos 19^\circ)}{\cos 19^\circ} = \frac{-6 \cos 19^\circ}{\cos 19^\circ} = -6.$$

Ответ: 4.

A18. Строим график каждой из функций и считаем количество точек пересечения. Более простого способа решения я не нашел.

Ответ: 2.

Часть В

B1. Пусть время, через которое оба автобуса будут опять одновременно на остановке, равно T . Первый автобус успеет совершить за это время N_1 кругов, второй – N_2 . Так как время одного круга у первого автобуса t_1 , а у второго t_2 , то

$$T = t_1 \cdot N_1; T = t_2 \cdot N_2 \Rightarrow t_1 N_1 = t_2 N_2.$$

Переведем время в минуты и получим

$$75 \cdot N_1 = 90 \cdot N_2 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{90}{75} = \frac{6}{5}.$$

Это значит, что первый автобус до встречи успеет пройти 6 кругов, а второй 5. Поэтому искомое время равно

$$T = t_1 \cdot N_1 = 75 \text{ минут} \cdot 6 = 450 \text{ минут.}$$

Такой же результат мы получим, если будем считать для второго автобуса

$$T = t_2 \cdot N_2 = 90 \text{ минут} \cdot 5 = 450 \text{ минут.}$$

Ответ: 450.

B2. Простое иррациональное уравнение. Главное в иррациональном уравнении это проверить корни уравнения, так как очень часто будут появляться посторонние корни. Если корни целые числа, то лучше проверить их подстановкой в само уравнение. Если нет, то необходимо проверить их по ОДЗ. Так как подкоренное выражение должно быть больше или равно нулю, то ОДЗ: $x > 1$ (строго больше, так как на ноль делить нельзя). Приведем к общему знаменателю. Получим

$$(\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{2x}\sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow \sqrt{2x(x-1)} = 3 - x + 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 2x} = 4 - x$$

Тут появляется еще одно ОДЗ. Так как в левой части уравнения у нас квадратный корень, то правая часть уравнения должны быть не отрицательна. Поэтому $4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$. Возведем во вторую степень правую и левую части уравнения. Получим

$$2x^2 - 2x = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow D = 36 - 4(-16) = 100 = 10^2 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm 10}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-6 - 10}{2} = -8 \text{ - ОДЗ} \\ \frac{-6 + 10}{2} = +2 \end{array} \right.$$

Ответ: 2.

B3. Чтобы найти точки пересечения прямой и параболы, нам надо просто решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Решим эту систему методом подстановки. Из уравнения прямой выражаем $y = 2x - 4$ и подставляем во второе уравнение. Получим

$$2x - 4 = x^2 + 4x - 12 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow D = 2^2 - 4(-8) = 36 = 6^2 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-2 - 6}{2} = -4 = x_1 \\ \frac{-2 + 6}{2} = 2 = x_2 \end{array} \right.$$

Теперь найдем соответствующие ординаты $y_1 = 2 \cdot (-4) - 4 = -12$.

Координата первой точки пересечения $A(-4; -12)$

$$y_2 = 2 \cdot (2) - 4 = 0$$

Координата второй точки пересечения $B(2; 0)$. Окончательно получаем

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = -4 + 2 - 12 + 0 = -14.$$

Ответ: -14.

B4. Простая текстовая задача. Всего на огурцы было потрачено $x_1 = 120 \text{ кг} \cdot 5000 \text{ руб/кг} = 600000 \text{ рублей}$. Так как 12 % выбросили, то в продажу поступило $m_2 = 0,88 \cdot m_1 = 0,88 \cdot 120 \text{ кг} = 105,6 \text{ кг}$. Полученная выручка будет равна $x_2 = 105,6 \text{ кг} \cdot 8000 \text{ руб/кг} = 844800 \text{ рублей}$. Значит, прибыль будет равна

$$\Pi = x_2 - x_1 = 844800 - 600000 = 244800 \text{ рублей.}$$

Ответ: 244800.

B5. С формулой сокращенного умножения

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

вы привыкли иметь дело в случаях, когда она очевидна. Например,

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = (a - 2b)^2 \text{ или } a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2.$$

В этой теме вы столкнетесь с этой же формулой сокращенного умножения, которая будет применяться

к не совсем стандартным выражениям.

ПРИМЕР. Упростите выражение $\sqrt{7-2\sqrt{12}}$.

Выражение $7-2\sqrt{12}$ мы должны попытаться представить в виде квадрата двучлена, то есть в виде $(a-b)^2$. Вспомним, что $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. В нашем выражении есть слагаемое с коэффициентом 2.

Следовательно, $\sqrt{12}$ есть не что иное, как ab . $\sqrt{12}$ можно представить как

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}.$$

Следовательно

$$a=2, b=\sqrt{3}.$$

НО НЕ НАОБОРОТ, ТАК КАК a ДОЛЖНО БЫТЬ БОЛЬШЕ b !!! Помним о свойстве $\sqrt{a^2} = |a|$.

Таким образом, получаем

$$\sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{7-2 \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{4-2 \cdot 2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2)^2 - 2 \cdot (2\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$$

Если Вы не увидели, как выделить полный квадрат (в некоторых задачах могут быть достаточно большие числа, с которыми трудно будет подобрать числа), то воспользуйтесь следующим алгоритмом. Выражение с корнем равно $2ab$. Свободный коэффициент равен $a^2 + b^2$. Получим систему

$$\begin{cases} 2ab = 2\sqrt{12} \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = \sqrt{12} \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{12}}{a} \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{12}}{a} \\ a^2 + \left(\frac{\sqrt{12}}{a}\right)^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{12}}{a} \\ a^2 + \frac{12}{a^2} = 7 \end{cases}$$

Решаем второе уравнение системы и находим a . Мы получим два значения. Не стоит этого пугаться. На самом деле одно из значений будет a , а второе будет b .

В любом случае лучше всего попытаться подобрать числа, чтобы мы получили формулу сокращенного умножения. Метод с системой применяйте только тогда, когда числа не играют.

Возвращаемся к нашему примеру. С учетом вышеизложенного получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{\sqrt{7}} + 6\right)\sqrt{8-2\sqrt{7}} + \left(\frac{4}{\sqrt{7}} - 6\right)\sqrt{8+2\sqrt{7}} &= \left(\frac{4+6\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} + \left(\frac{4-6\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} = \\ &= \frac{2(2+3\sqrt{7})(\sqrt{7}-1)}{\sqrt{7}} + \frac{2(2-3\sqrt{7})(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}(2\sqrt{7}-3\sqrt{7}+2\sqrt{7}-3\sqrt{7}) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}}(4\sqrt{7}-6\sqrt{7}) = \frac{2}{\sqrt{7}}(-2\sqrt{7}) = -4. \end{aligned}$$

Ответ: -4 .

В6. Надо увидеть формулу сокращенного умножения в правой части уравнения

$$0,25x^2 + 0,1x + 0,01 = (0,5x)^2 + 2 \cdot 0,5x \cdot 0,1 + (0,1)^2 = (0,5x + 0,1)^2.$$

Таким образом, получаем

$$(0,2x^2 + 0,3x - 1,1)^2 = (0,5x + 0,1)^2.$$

Для того, чтобы понять и запомнить как решаются уравнения такого вида, решим простое уравнение $x^2 = 25$.

Очевидно, что у такого уравнения два корня: $x_1 = +\sqrt{25} = +5$ и $x_1 = -\sqrt{25} = -5$, то есть $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$. Значит у нас из одного уравнения появятся два.

$$1) 0,2x^2 + 0,3x - 1,1 = 0,5x + 0,1 \Rightarrow 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$2) 0,2x^2 + 0,3x - 1,1 = -(0,5x + 0,1) \Rightarrow 0,2x^2 + 0,8x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Читаем условие задачи и записываем в ответ то, что от нас просят $x_1 - x_2 = 3 - (-5) = 8$.

Ответ: 8.

B7. Для решения этого задания нам понадобиться метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории. Не игнорируйте его!

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.

Поняли что-нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

ПРИМЕР. Решите неравенство $(6-x)(x+3) \leq 0$

При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида $(x \pm a)$, а не $(a \pm x)$ и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже.

У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем -1 из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3) \leq 0$$

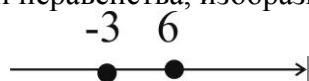
Сокращая на -1 не забываем поменять знак неравенства на противоположный

$$(x-6)(x+3) \geq 0$$

Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступать к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

$$x-6=0 \Rightarrow x=6 \text{ и } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.

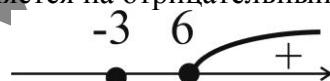


Если все множители неравенства записаны в виде $(x \pm a)$ и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!!

Не верите? Можем проверить. Пусть $x=7$, тогда $(x-6)(x+3) = (7-6)(7+3) = 1 \cdot 10 = 10 > 0 \Rightarrow$ выражение положительно



А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства унисален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный



В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства « \geq », то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка: $(-\infty; -3]$ и $[6; +\infty)$.

И еще один пример.

ПРИМЕР: Найдите наибольшее целое решение неравенства $(x-2)(x^2+x-6) < 0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

Перепишем неравенство в новом виде

$$(x-2)(x+3)(x-2) < 0 \Rightarrow (x-2)^2(x+3) < 0$$

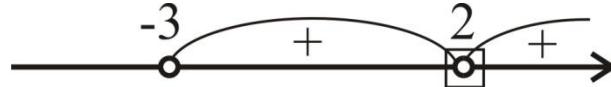
При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.



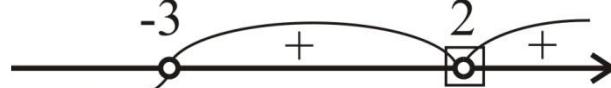
Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно



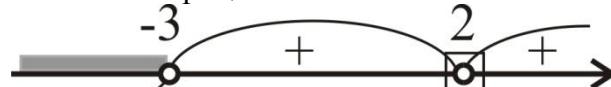
При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение $(x - 2)$ возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!



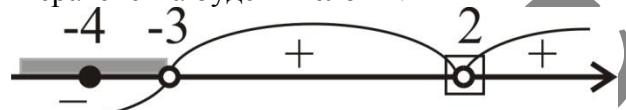
В точке -3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой



Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до -3 (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число -4 .



Ответ: -4 .

Метод интервалов для рациональных функций можно сформулировать в следующем виде.

1. Привести неравенство к стандартному виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (слева была дробь, справа ноль).
2. Разложить на множители многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (как мы знаем, для этого придётся решить уравнения $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$). Другими словами надо сделать так, чтобы в числителе и знаменателе дроби были только произведения скобок вида $(x \pm a)$, где a – число. В некотором плане это подобно методы решения уравнений, который мы прошли в первой главе.
3. Нули числителя, не совпадающие с нулями знаменателя, отметить на числовой оси **точками** (если неравенство нестрогое; если строгое – кружочками), а нули знаменателя – **кружочками** (на ноль делить нельзя).

ЕЩЕ РАЗ НАПОМНЮ, ЧТО ЕСЛИ ВСЕ МНОЖИТЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНЫ В ВИДЕ $(x \pm a)$ И НЕТ МИНУСОВ ПЕРЕД СКОБКАМИ, ТО ЗНАЧЕНИЕ ТАКОЙ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ БУДЕТ ВСЕГДА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ!!!

Провести кривую знаков, проходя через все точки, отмеченные на числовой прямой, меняя или не меняя знак в зависимости от степени двучлена, отвечающего данной точке.

4. Записать ответ, обращая особое внимание на граничные точки, часть из которых может быть «выколота».

А теперь вернемся к нашему неравенству. Во-первых, обращаем внимание на то, что работы нам не предстоит не так уж и много. В правой части неравенства ноль, а в левой одна дробь (то есть все так, как нам и надо). Во-вторых, при помощи корней раскладываем квадратичные трехчлены в числители и знаменателе.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x_1 = +2 \quad x_2 = +1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad D = 4^2 - 4 \cdot 3 = 2^2 \Rightarrow x_1 = +3 \quad x_2 = +1$$

Так же не забываем вынести минус один в знаменателе второй дроби

$$\frac{x+5}{x^2 - 3x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4x + 3}{2 - x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+5)}{(x-1)(x-2)} \frac{(x-1)(x-3)}{-1 \cdot (x-2)} \geq 0$$

При сокращении на минус один меняем знак неравенства на противоположный

$$\frac{(x+5)(x-3)(x-1)}{(x-2)^2(x-1)} \leq 0$$

А теперь самое интересное. Ни в коем случае не сокращаем на $(x-1)!!!$ Конечно, можно сократить данный множитель и держать в памяти, что точку 1 нужно выколоть из решений, но лучше переписать неравенство в следующем виде

$$\frac{(x+5)(x-3)}{(x-2)^2(x-1)} \leq 0.$$

Наносим точки на ось и рисуем змейку



По условию задачи выражение должно быть меньше или равно нуля



Решением будут числа $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 3$. Их сумма равна -12 .

Ответ: -12 .

B8 По условию задачи $\alpha = \arctg \frac{5}{3}$. Значит, $\tan \alpha = \frac{5}{3}$. Пусть $A_1A = 5x$, $AD = 3x$. Опустим высоту AF на BC . Так как $AD = 3x$ и по условию задачи $BC = CC_1$, то $BF = 2x$ (это мы используем чуть позже). По условию задачи получается, что мы отсекли половину от призмы $AFCDA_1NC_1D_1$. Если объем отсекаемой части равен 27, то объем призмы $AFCDA_1NC_1D_1$ будет равен 54. По определению объем призмы равен произведению площади основания на высоту

$$V_{AFCDA_1NC_1D_1} = AD \cdot DC \cdot H = 3x \cdot DC \cdot 5x \Rightarrow 15x^2 \cdot DC = 54 \Rightarrow 5x^2 \cdot DC = 18.$$

Объем треугольной призмы $ABFA_1B_1N$ будет равен

$$V_{ABFA_1B_1N} = S_{\text{осн}} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot DC \cdot 5x = 5x^2 \cdot DC = 18.$$

Значит искомый объем равен $18 + 54 = 72$.

Ответ: 72.

B9. Нам предлагаю решить достаточно простое тригонометрическое уравнение. Вспомним формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ и применим ее

$$1 - 2\sin^2 x - 11\sin x - 6 = 0 \Rightarrow -2\sin^2 x - 11\sin x - 5 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + 11\sin x + 5 = 0$$

Пусть $\sin x = t$. Тогда

$$2t^2 + 11t + 5 = 0 \Rightarrow D = 121 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 81 = 9^2 \Rightarrow t = \frac{-11 \pm 9}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -5 - \emptyset \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Первый корень не имеет смысла. Следовательно, у нас будет всего одно уравнение

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -30^\circ + 360^\circ n \\ x_2 = -150^\circ + 360^\circ n \end{cases}$$

По условию задачи корень должен принадлежать промежутку $[-90^\circ; 360^\circ]$. В первом случае при $n = 0$ получим $x_1 = -30^\circ + 360^\circ \cdot 0 = -30^\circ$ и $n = 1$ получим $x_2 = -30^\circ + 360^\circ \cdot 1 = 330^\circ$. Во втором случае при $n = 1$ получим $x_3 = -150^\circ + 360^\circ \cdot 1 = 210^\circ$. Сумма корней будет равна 510° .

Ответ: 510.

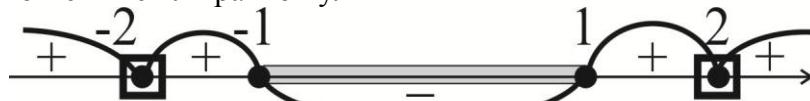
B10. Так как выражение $|x^2 - 4|$ всегда больше (или равно) нулю, то неравенство можно переписать в виде

$$x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \leq 0.$$

Главное не забыть нанести точки $x=2$ и $x=-2$ (точки, в которых подмодульное выражение становится равно нулю) на ось с решением



По условию неравенство меньше или равно нуля



У небрвенства будет 5 целых решений: $-2; -1; 0; 1$ и 2 .

Ответ: 5.

B11. Обязательно делаем пояснительный рисунок. Так как пройденный телом путь можно найти как произведение скорости тела на время движения, то (не забываем, что второе тело двигалось на 10 секунд меньше)

$$AC = v_1 \cdot t = 1 \cdot t = t, \quad BC = v_1 \cdot (t-10) = 0,5(t-10)$$

По теореме косинусов

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos 60^\circ$$

$$(\sqrt{133})^2 = t^2 + (0,5(t-10))^2 - 2 \cdot t \cdot 0,5(t-10) \cdot \frac{1}{2}.$$

Открываем скобки, приводим подобные и решаем квадратное уравнение. Получаем $t = 12$ (с). Значит, суммарное расстояние будет равно

$$L = L_1 + L_2 = v_1 t + v_2 t = t(v_1 + v_2) = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18 \text{ (м).}$$

Ответ: 18.

B12. В целом нам очень повезло с этой задачей. Так как $BC = CE$ и сечение проходит через середины ребер BC и CC_1 нам необходимо будет найти площадь только половины сечения, то есть площадь трапеции $KMNP$. Она будет равна

$$S_{KMNP} = \frac{1}{2} (KM + NP) \cdot H.$$

Основание $NP = CO$ найдем из прямоугольного треугольника CBO

$$BO^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow 2OC^2 = BC^2 \Rightarrow OC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Основание MK будет равно половине CO , так как $BK = KC$ и KM параллельно CO

$$MK = \frac{CO}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

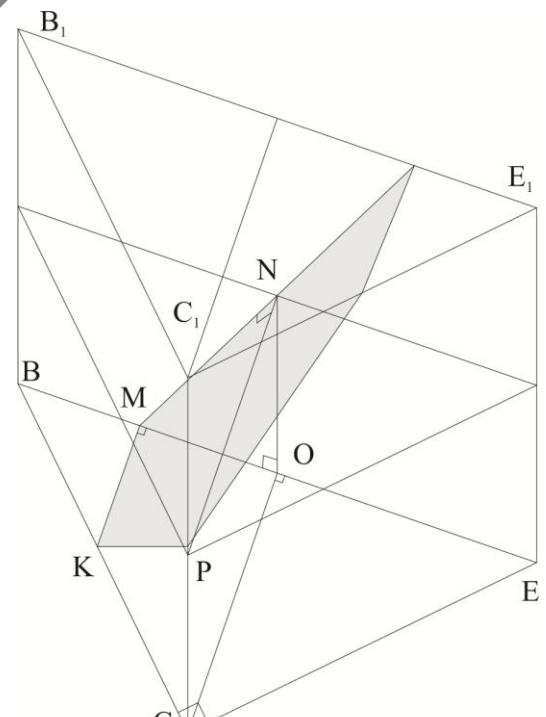
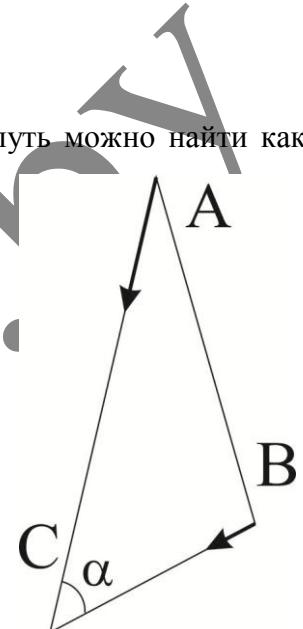
А теперь осталось найти высоту трапеции – MN . Рассмотрим треугольник MNO . Катет $NO = 0,5C_1C$. Найдем катет MO

$$MO = \frac{1}{2} \cdot BO = \frac{BE}{4} = \frac{\sqrt{BC^2 + CE^2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

По теореме Пифагора для ΔMNO

$$MN^2 = MO^2 + NO^2 \Rightarrow MN = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Площадь трапеции равна



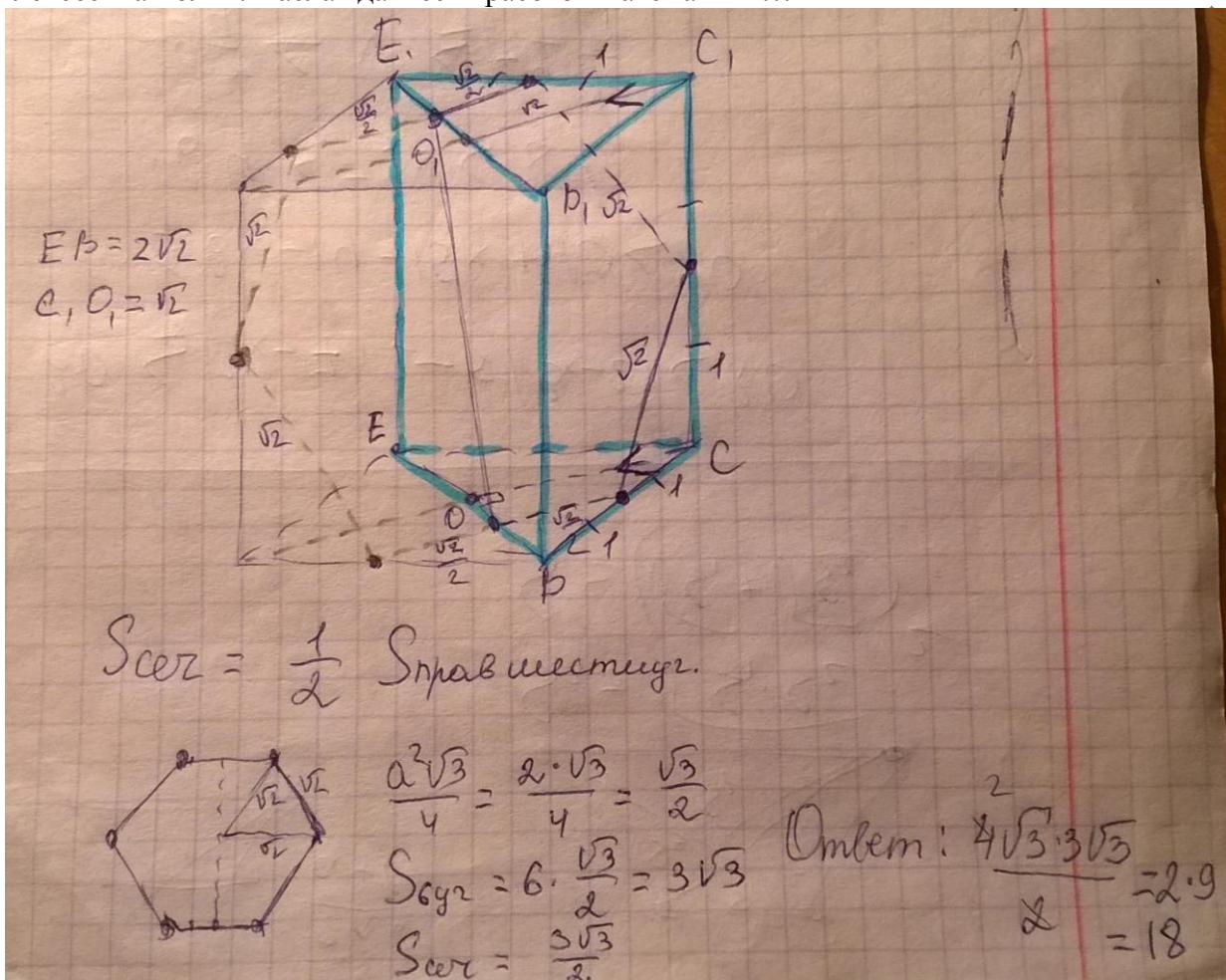
$$S_0 = \frac{1}{2} (KM + NP) \cdot H = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Площадь сечения равна

$$S = 2S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

В ответ записываем $4\sqrt{3} \cdot S = 4 \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 18$.

Очень красивым решением этой задачи поделилась со мной учитель математики Мозырского лицея Ольга Алексеевна Голик. Наслаждайтесь красотой математики!!!



Ответ: 18.