

В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории.

Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.

Если у вас есть более красивые решения отдельных задач – поделитесь! ☺

2017/2018, 3 этап, первый вариант

A1. Для начала оценим значение выражения $\sqrt[3]{28}$. Так как $\sqrt[3]{27} = 3$, то $\sqrt[3]{28}$ будет чуть больше трех. А теперь посмотрим на числовую ось. Между 0 и 1 находятся два деления. Это значит, что цена деления равна 0,5. На координатной оси нашей точке может соответствовать точка В. **Ответ: 4.**

A2. Не надо подставлять 5 разных значений m в неравенство. Надо решить неравенство и найти подходящее число: $m + 3,2 > 3,8 \Rightarrow m > 0,6$. А дальше все просто: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{2}{3} \approx 0,67$; $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{2}{5} = 0,4$.

Ответ: 2.

A3. Пусть радиус меньшей окружности равен x . Тогда радиус другой окружности равен $x + 3$. Расстояние АВ равно сумме радиусов двух окружностей. Следовательно, $x + 3 + x = 49 \Rightarrow 2x = 46 \Rightarrow x = 23$. Расстояние АК состоит из одного радиуса большой окружности и двух радиусов маленькой окружности: $AK = (x + 3) + 2x = 72$. **Ответ: 5.**

A4. Угол АОВ развернутый и равен 180° . Пусть $\angle COB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$. Тогда по условию задачи $7\beta = 5\alpha$ и $\beta + \alpha = 180^\circ$. Систему решим методом подстановки $\alpha = \frac{7\beta}{5} \Rightarrow \beta + \frac{7\beta}{5} = 180^\circ \Rightarrow \beta = 75^\circ$. **Ответ: 3.**

A5. Для того, чтобы найти значение выражения, надо знать что $\arctg(-x) = -\arctg(x)$ и что $\tg \frac{\pi}{4} = 1$:

$$\arctg(-1) - \frac{3\pi}{2} = -\arctg 1 - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{7\pi}{4}. \text{ Ответ: 4.}$$

A6. Слишком простое задание. Просто подставим $n = 9$ и все: $a_9 = (9 - 5)^3 = 4^3 = 64$. **Ответ: 2.**

A7. Логарифмом числа b по основанию a ($b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ – эти условия должны **ВСЕГДА** выполняться) называется показатель степени, в который нужно возвести число a , чтобы получить число b : $a^{\log_a b} = b$. Это равенство, выражающее определение логарифма, называется **основным логарифмическим тождеством**. Равенство $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$. Для того, чтобы вычислить значение данного нам выражения, нам надо вспомнить два свойства.

1. Если $x > 0$, то $\log_a x^p = p \log_a x$ или $p \log_a x = \log_a x^p$

Иногда говорят, что можно «выплюнуть» степень подлогарифмического выражения.

2. Если $a > 0$, то $\log_{a^q} x = \frac{1}{q} \log_a x$ или $\frac{1}{q} \log_a x = \log_{a^q} x$

А теперь применим эти свойства к нашей задаче

$$\log_{\frac{1}{6}} 36\sqrt{6} = \log_{6^{-1}} \left(6^2 \cdot 6^{\frac{1}{2}} \right) = \log_{6^{-1}} \left(6^{2+\frac{1}{2}} \right) = \log_{6^{-1}} 6^{2,5} = \frac{2,5}{-1} \log_6 6 = -2,5$$

Ответ: 3.

A8. Очень простое задание. Напрягаем Википедию: «Одночлен – простое математическое выражение, прежде всего рассматриваемое и используемое в элементарной алгебре, а именно, произведение, состоящее из числового множителя и одной или нескольких переменных, взятых каждая в неотрицательной степени». В нашем случае ключевая фраза в определении «взятых каждая в **неотрицательной** степени».

Ответ: 5.

A9. По определению скорость движения равна $v = \frac{S}{t} \Rightarrow S = vt$. Так как $S = 2,7t \Rightarrow v = 2,7$ (км/ч).

Найдем время, которое понадобилось пешеходу, чтобы преодолеть 10,8 км: $t = \frac{S}{v} = \frac{10,8 \text{ км}}{2,7 \text{ км/ч}} = 4$ (ч). Судя по графику все 5 пешеходов прошли 10,8 км и только один сделал это за 4 часа. **Ответ: 3.**

A10. Так как $\sqrt{a^2} = |a|$, то $\sqrt{27(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{27} \cdot \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = 3\sqrt{3}|\sqrt{3}-2| = 3\sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}-9$.

Ответ: 1.

A11. Нам дано уравнение окружности. Подставим вместо абсциссы $x = 3$, вместо ординаты $y = -12$ и найдем радиус окружности: $(3-2)^2 + (-12+5)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = 50 \Rightarrow R = 5\sqrt{2}$. **Ответ: 2.**

A12. Зная площадь треугольника и длины двух его сторон, мы легко найдем значение синуса угла между ними: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2S}{ab} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{15}}{6 \cdot 8} = \frac{\sqrt{15}}{8}$. А теперь самое сложное. Важно понять, что этому значению синуса будут соответствовать два угла: острый и тупой.

На рисунке изображены два треугольника. У них одинаковая площадь. При этом один треугольник остроугольный, а второй тупоугольный. По условию задачи нам надо найти наибольшее значение, которое может принимать третья сторона (в нашем случае это основание треугольника). Это значит, что треугольник должен быть тупоугольным и значение косинуса угла, противолежащего большей стороне, будет отрицательным. Из основного тригонометрического тождества

найдем это значение: $\cos \gamma = -\sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2} = -\frac{7}{8}$. А теперь применим теорему косинусов:

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = 2\sqrt{46}$. **Ответ: 1.**

A13. Для решения этого задания нам понадобится метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории. Не игнорируйте его!

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.

Поняли что-нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

ПРИМЕР. Решите неравенство $(6-x)(x+3) \leq 0$

При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида $(x \pm a)$, а не $(a \pm x)$ и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже.

У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем -1 из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3) \leq 0$$

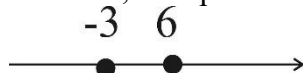
Сокращая на -1 не забываем поменять знак неравенства на противоположный

$$(x-6)(x+3) \geq 0$$

Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступать к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

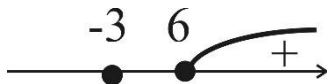
$$x-6=0 \Rightarrow x=6 \text{ и } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.

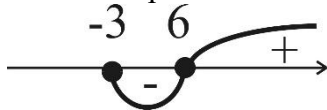


Если все множители неравенства записаны в виде $(x \pm a)$ и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!!

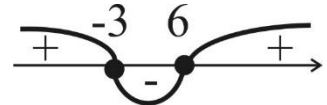
Не верите? Можем проверить. Пусть $x=7$, тогда $(x-6)(x+3) = (7-6)(7+3) = 1 \cdot 10 = 10 > 0 \Rightarrow$ выражение положительно



А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства уникален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный



В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства « $\geq$ », то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка: $(-\infty; -3]$ и $[6; +\infty)$.

И еще один пример.

ПРИМЕР: Найдите наибольшее целое решение неравенства $(x-2)(x^2+x-6) < 0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

Перепишем неравенство в новом виде: $(x-2)(x-2)(x+3) < 0 \Rightarrow (x-2)^2(x+3) < 0$

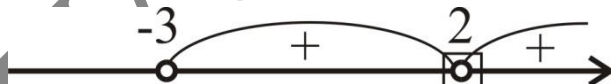
При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.



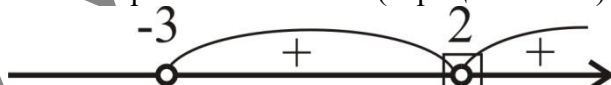
Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно



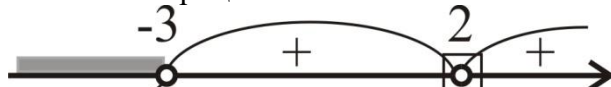
При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение $(x-2)$ возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!



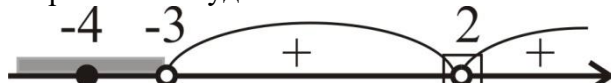
В точке -3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой



Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до -3 (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число -4.



Ответ: -4.

Метод интервалов для рациональных функций можно сформулировать в следующем виде.

1. Привести неравенство к стандартному виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, то есть, чтобы слева была дробь, а справа был ноль.

2. Разложить на множители многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (как мы знаем, для этого придётся решить уравнения $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$). Другими словами надо сделать так, чтобы в числителе и знаменателе дроби были только произведения скобок вида $(x \pm a)$, где a – число. В некотором плане это подобно методам решения уравнений, который мы прошли в первой главе.

3. Нули числителя, не совпадающие с нулями знаменателя, отметить на числовой оси **точками** (если неравенство нестрогое; если строгое – **кружочками**), а нули знаменателя – **кружочками** (на ноль делить нельзя).

ЕЩЕ РАЗ НАПОМНЮ, ЧТО ЕСЛИ ВСЕ МНОЖИТЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНЫ В ВИДЕ $(x \pm a)$ И НЕТ МИНУСОВ ПЕРЕД СКОБКАМИ, ТО ЗНАЧЕНИЕ ТАКОЙ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ БУДЕТ ВСЕГДА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ!!!

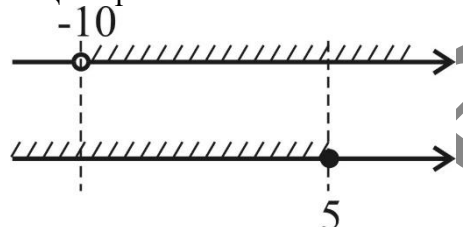
Провести кривую знаков, проходя через все точки, отмеченные на числовой прямой, меняя или не меняя знак в зависимости от степени двучлена, отвечающего данной точке.

4. Записать ответ, обращая особое внимание на граничные точки, часть из которых может быть «выколота».

И поговорим немного о системах неравенств.

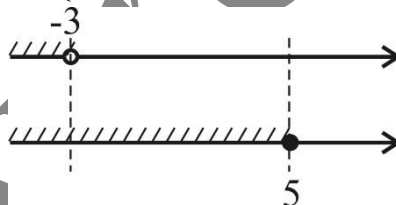
ПРИМЕР. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} x > -10 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

При решении системы мы должны получить ответ, который будет решением каждого неравенства системы, то есть нам нужны только **ОБЩИЕ** решения



Смотрим на рисунок. Обоим неравенствам будет удовлетворять промежуток $(-10; 5]$

ПРИМЕР. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} x < -3 \\ x \leq 5 \end{cases}$$



Смотрим на рисунок. Обоим неравенствам будет удовлетворять промежуток $(-\infty; -3)$

Однако не всегда система будет иметь решения.

ПРИМЕР. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} x > 15 \\ x \leq 10 \end{cases}$$

Сделайте рисунок самостоятельно и убедитесь, что у этой системы нет решений.

А теперь вернемся к нашей системе неравенств. Первое неравенство решается очень просто

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \Rightarrow (x - 3)^2 > 0$$

Второе неравенство разобьём на два. Первое неравенство (не забывайте менять знак при умножении/делении на отрицательное число):

$$2 - 3x \geq -9,16 \Rightarrow -3x \geq -2 - 9,16 \Rightarrow -3x \geq -11,16 \Rightarrow -3x \geq -11,16 \Rightarrow x \leq \frac{-11,16}{-3} \Rightarrow x \leq 3,72$$

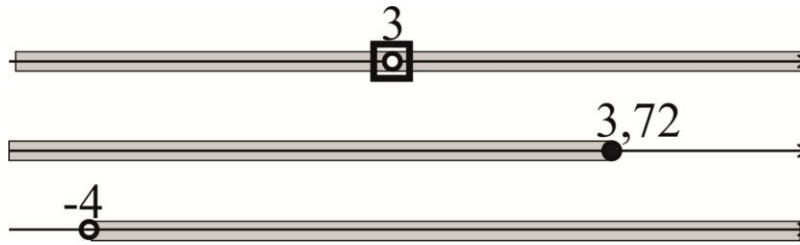
Второе неравенство

$$2 - 3x < 14 \Rightarrow -3x < -2 + 14 \Rightarrow -3x < 12 \Rightarrow x > -4$$

Есть еще один способ решения второго неравенства. Для продвинутых

$$-9,16 \leq 2 - 3x < 14 \Rightarrow -9,16 - 2 \leq -3x < -2 + 14 \Rightarrow -11,16 \leq -3x < 12 \Rightarrow \frac{-11,16}{-3} \geq x > \frac{12}{-3} \Rightarrow -4 < x \leq 3,72$$

Рисуем числовые оси и наносим на них решения:

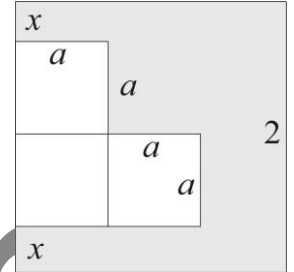


Ответ: 5.

A14. Смотрим внимательно на рисунок. Обозначим размер одинаковых отрезков как a . Тогда $2a$ будет равно разности между стороной квадрата и длиной двух отрезков x (смотрим на левую сторону квадрата): $2a = 2 - 2x \Rightarrow a = 1 - x$

При этом площадь закрашенной части будет равна разности между площадью квадрата и площадью вырезанной части. А вырезали мы три квадрата со стороной a .

Следовательно: $S = 2 \cdot 2 - 3a^2 = 4 - 3(1 - x)^2$. **Ответ: 1.**



A15. Проверяем каждое из утверждений.

1. Просто равенство. Утверждение неверное.
2. Корни уравнения 7 и -1. Утверждение неверное.
3. Оба уравнения не имеют корней. Утверждение верное.
4. Корень уравнения 0. Утверждение неверное.
5. Подставьте -2 и убедитесь, что это корень. Утверждение неверное.

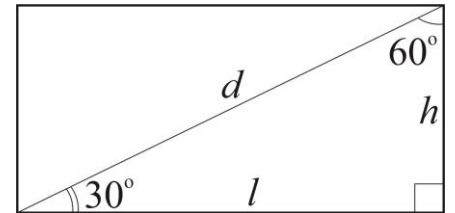
Ответ: 3.

A16. Объем цилиндра равен произведению площади основания цилиндра S на его высоту h . Так как основанием цилиндра является окружность, то большая сторона прямоугольника (смотрите рисунок) будет равна длине окружности. Следовательно, $l = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{l}{2\pi}$. Значит

объем цилиндра будет равен: $V = S_{\text{основания}} h = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 h = \frac{l^2}{4\pi} h$

Высота цилиндра h будет равна половине диагонали d (вспоминаем свойство о длине катета, который лежит напротив угла в 30°). Большую сторону прямоугольника l мы найдем по теореме Пифагора: $d^2 = h^2 + l^2 \Rightarrow l^2 = d^2 - h^2$. Окончательно получим:

$$V = \frac{l^2}{4\pi} h = \frac{d^2 - h^2}{4\pi} h = \frac{20^2 - 10^2}{4\pi} \cdot 10 = \frac{750}{\pi}$$



Ответ: 5.

A17. Вы или умеете решать тригонометрические уравнения или нет. Расписывать теорию я не вижу смысла. Поэтому к этой задаче только решение

$$\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3} \Rightarrow 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + \pi N \Rightarrow 5x + 45^\circ = 120^\circ + 180^\circ N \Rightarrow x = 15^\circ + 36^\circ N \quad (N \in \mathbb{Z}). \text{ **Ответ: 4.**}$$

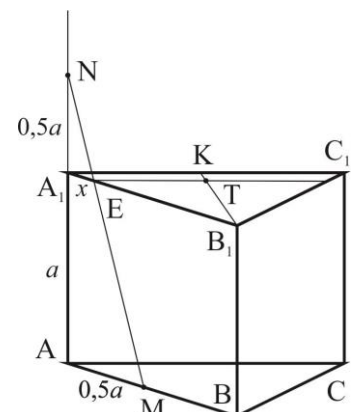
A18. Соединим точки М и N. Треугольники NAM и NA₁E подобны. Следова-

тельно, $\frac{NA}{NA_1} = \frac{AM}{A_1E} \Rightarrow \frac{1,5a}{0,5a} = \frac{0,5a}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{6}a$. Так как $\frac{EA_1}{B_1E} = \frac{TK}{B_1T} = \frac{1}{5}$

(B₁E=5a/6), то по теореме Фалеса $ET \parallel A_1K$ и треугольники ETB₁ и A₁KB₁ по-

добны. Получим, $\frac{B_1E}{B_1A_1} = \frac{ET}{A_1K} \Rightarrow \frac{\frac{5}{6}a}{a} = \frac{ET}{\frac{1}{2}a} \Rightarrow ET = \frac{5}{12}a = \frac{5}{12} \cdot 18\sqrt{6} = \frac{15}{2}\sqrt{6}$. Так

как точка К – середина стороны A₁C₁, то длина искомого отрезка в два раза больше. **Ответ: 2.**



Часть В

В1. Графиком функции $y = a(x - m)^2 + n$ является парабола, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц вправо (или влево, если $m < 0$) и сдвига вдоль оси y на n единиц вверх (или вниз, если $n < 0$).

Немного преобразуем внешний вид нашей функции: $y = (x + 2)^2 - 2 = (x - (-2))^2 - 2$

1. При таком виде очевидно, что функцию $y = x^2$, у которой вершина находится в точке $(0; 0)$ параллельно перенесли влево на 2 единицы и вниз тоже на 2. Таким образом вершина параболы переместилась в точку $(-2; -2)$.

2. Когда функция пересекает ось Oy , ее абсцисса (или координата x) становится равно 0. Теперь легко найдем ординату точки пересечения: $y = (0 - 2)^2 - 6 = -2$. Значит точка пересечения $(0; -2)$.

3. Когда функция пересекает ось Ox , ее ордината (или координата y) становится равно 0. Теперь легко найдем абсциссу точки пересечения: $0 = x^2 - x - 2 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$. У нас будут две точки пересечения: $(-1; 0)$ и $(2; 0)$. В вариантах ответа есть только вторая точка

Ответ: А6Б2В4.

В2. Основное свойство нечетной функции: $f(-x) = -f(x)$. Иногда говорят, что нечетная функция «выплевывает» минус. При этом нечетная функция симметрична относительно начала координат. Учитывая это построим график функции для абсциссы от -5 до 0 (пунктирная линия).

1. Неверно.

2. Смотрим на график и ищем точки пересечения с осью Ox . Да, таких точек три.

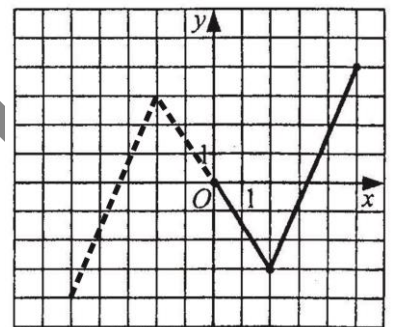
3. Смотрим на график. Неверно.

4. Смотрим на график. Верно.

5. Смотрим на график. При $x = -2$ функция принимает значение $y = 3$. Не верно.

6. Смотрим на график. На этом промежутке значение y уменьшается. Верно.

Ответ: 246.



В3. Процентом (лат. pro centum – с сотни) называется сотая часть целого.

1 % это сотая часть числа. Например, 2 % от числа 25 находится как $\frac{2\%}{100\%} \cdot 25 = 0,5$. Однако можно и по-другому. Сначала находим сколько составляет один процент от 25 и потом умножаем это значение на 2 процента $\frac{25}{100\%} \cdot 2\% = 0,5$. Есть и третий способ. Составим пропорцию и решим ее:

$$\frac{25 - 100\%}{x - 2\%}$$

Какие рассуждения вам более понятны такие и используйте при решении задач. На мой взгляд вариант с пропорцией дает меньший шанс на ошибку.

Аналогичные рассуждения можно использовать и при решении обратных задач. Найдите число, если 2 % от него равны 4. Воспользуемся пропорцией

$$\frac{2\% - 4}{100\% - x} \Rightarrow x = \frac{100\% \cdot 4}{2\%} = 200$$

Если надо найти, например, какой процент составляет число 5 от 40, то число 40 возьмем за 100 %, а число 5 за $x\%$ и опять воспользуемся пропорцией:

$$\frac{40 - 100\%}{5 - x\%}$$

Важно понимать, что если величина увеличилась на 20 %, то

$$x_2 = x_1 + \frac{20\%}{100\%} x_1 = x_1 + 0,2x_1 = x_1 \cdot 1,2, \text{ то есть величина увеличилась в } 1,2 \text{ раза.}$$

Если величина уменьшилась на 30 %, то

$$x_2 = x_1 - x_1 \frac{30\%}{100\%} = x_1 - 0,3x_1 = x_1 \cdot 0,7, \text{ то есть осталось } 70\% \text{ от } 100\% \text{ начальных.}$$

Увеличение величины на 100 % означает, что она увеличилась в 2 раза $x_2 = x_1 + x_1 \frac{100\%}{100\%} = x_1 + x_1 = 2x_1$.

Увеличение величины на 300 % означает, что она увеличилась в 4 раза $x_2 = x_1 + x_1 \frac{300\%}{100\%} = x_1 + 3x_1 = 4x_1$.

ПРИМЕР. Насколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 40%, а другое уменьшить на 10%?

Если первое число принять за a , а второе за b , то их произведение равно ab . 40% от числа a равно $0,4a$. Увеличение на 40% числа a означает, что число станет равно $a + 0,4a = 1,4a$. Второе число уменьшают. Значит, уменьшение числа b на 10% означает $b - 0,1b = 0,9b$. Тогда, произведение чисел равно $1,4a \cdot 0,9b = 1,26ab$,

что по отношению к ab составляет 126 %. Таким образом произведение увеличилось на 26%.

Вернемся к нашей задаче. Всего было продано $x = 370 - 120 = 250$ игрушек. Это значит, что если увеличить стоимость 250 игрушек в k раз, то их стоимость будет равна стоимости 370 игрушек. Значит, $250k = 370 \Rightarrow k = \frac{370}{250} = 1,48$, то есть стоимость увеличили на 48 процентов.

Ответ: 48.

В4. Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня. Иррациональные уравнения решаются не просто, а ОЧЕНЬ просто. Самое главное запомнить методы решения и применять их на практике. Это одни из самых простых видов уравнений!!!

Главное в иррациональном уравнении – это проверить корни уравнения, так как очень часто будут появляться посторонние корни. Если корни целые числа, то лучше проверить их подстановкой в само уравнение. Если нет, то необходимо проверить их по ОДЗ.

Перенесем второе слагаемое из левой части уравнения в правую (чтобы все слагаемые были положительными) и возведем обе части уравнения во вторую степень. Получим

$$\begin{aligned}\sqrt{x+11} &= \sqrt{3x+4} + \sqrt{2x-7} \Rightarrow (\sqrt{x+11})^2 = (\sqrt{3x+4} + \sqrt{2x-7})^2 \Rightarrow \\ x+11 &= 3x+4 + 2x-7 + 2\sqrt{3x+4}\sqrt{2x-7} \Rightarrow 7-2x = 2\sqrt{3x+4}\sqrt{2x-7}\end{aligned}$$

Не забываем записать ОДЗ!!! Так как $2\sqrt{3x+4}\sqrt{2x-7} \geq 0$, то $7-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3,5$. А теперь опять возведем обе части уравнения во вторую степень. Получим

$$(7-2x)^2 = (2\sqrt{3x+4}\sqrt{2x-7})^2 \Rightarrow 79-28x+4x^2 = 4(3x+4)(2x-7)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим уравнение $2x^2 + 15x - 77 = 0$. Его корни 3,5 и -11 мы должны обязательно проверить по ОДЗ!!! Один из них будет лишним.

Ответ: 14.

В5. Общим делителем нескольких чисел называется число, являющееся делителем каждого из этих чисел. Среди всех делителей всегда есть наибольший. Такой делитель называется **наибольшим общим делителем** (обозначается НОД). Так, например, числа 16, 24, 32 имеют наибольший общий делитель – число 8. Этот факт коротко записывается так: НОД (16, 24, 32) = 8.

Если данные числа небольшие, то наибольший общий делитель можно легко угадать. Если же даны большие числа, то НОД можно найти разложением чисел на простые множители и выписыванием тех множителей, которые входят во все данные числа. Затем каждый такой множитель следует взять с наименьшим показателем, с которым он входит во все данные числа, после чего нужно произвести умножение.

Лучше, как обычно, на примере.

ПРИМЕР. Пусть даны числа 1080 и 8100. Найти НОД (1080, 8100).

Раскладываем число 1080 на простые делители: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5. Выпишем теперь все простые делители числа 8100: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 5. Таким образом, $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1$, а $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. Значит,

$$\text{НОД} (1080, 8100) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540.$$

Решение можно оформить и по-другому.

ПРИМЕР. Найти НОД (126, 540, 630)

Рисуем два столбца. Само число записываем в левый столбец. Делим каждое число на простые числа (записываем в правый столбец). Результат деления записываем в левый столбец.

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\text{НОД}(126, 540, 630) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

Если числа a и b таковы, что $\text{НОД}(a, b) = 1$, то числа a и b называют **взаимно простыми**. Например, числа 21 и 26 являются взаимно простыми, хотя каждое из них – составное.

Общим кратным нескольких чисел называется число, являющееся кратным каждому из них. Например, числа 14, 18, 7 имеют общее кратное число 252, однако число 126 тоже является общим кратным этих чисел. Среди всех общих кратных всегда есть наименьшее, которое называется **наименьшим общим кратным** (обозначается НОК). В нашем примере наименьшим общим кратным перечисленных чисел будет число 126. Кратко этот факт записывается так: $\text{НОК}(14, 18, 7) = 126$.

Если числа небольшие, то наибольшее общее кратное можно легко угадать. Если же даны большие числа, то НОК можно найти разложением чисел на простые множители и выписыванием тех множителей, которые входят хотя бы в одно из данных чисел. После этого каждый такой множитель нужно взять с наибольшим показателем, с которым он входит во все данные числа. Затем следует произвести умножение.

ПРИМЕР. Пусть даны числа 1080 и 8100. Найти НОК(1080, 8100).

Раскладываем число 1080 на простые делители: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5. Выпишем теперь все простые делители числа 8100: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 5. Таким образом, $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, а $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. Значит,

$$\text{НОК}(1080, 8100) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 16200.$$

Ответ. НОК(1080, 8100) = 16200.

ПРИМЕР. Найти НОК(270, 300, 315)

270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\text{НОК}(270, 300, 315) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18\,900$$

Разложим данное нам число на множители: $357 = 3 \cdot 119 = 3 \cdot 7 \cdot 17$. А теперь найдем сумму всех чисел, на которые 357 делится нацело: $3 + 7 + 17 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 17 + 3 \cdot 17 = 218$. Думаете это и есть ответ к нашей задаче? А вот и нет! Мы забыли про число 1 и число 357. Окончательно получаем $218 + 1 + 357 = 576$.

Ответ: 576.

В6. Немного повторения.

1. $a^m a^n = a^{m+n}$ или $a^m a^{-n} = a^{m-n}$. Например, $x^{10} x^9 = x^{10+9} = x^{19}$ или $x^{10} x^{-9} = x^{10-9} = x^1 = x$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ или $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$. Например, $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$ или $\frac{x^7}{x^{-2}} = x^{7-(-2)} = x^{7+2} = x^9$.

На самом деле пример достаточно простой. Внимательно следите за преобразованиями

$$\frac{3^x}{9} \cdot 2^x - 8 \cdot \frac{2^x}{8} - 384 \cdot \frac{3^x}{27} + 128 = 0 \Rightarrow \frac{3^x}{9} \cdot 2^x - 2^x - 128 \cdot \frac{3^x}{9} + 128 = 0 \Rightarrow 2^x \left(\frac{3^x}{9} - 1 \right) - 128 \left(\frac{3^x}{9} - 1 \right) = 0$$

$$\left(\frac{3^x}{9} - 1 \right) (2^x - 128) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3^x}{9} - 1 = 0 \Rightarrow 3^{x-2} = 1 \Rightarrow 3^{x-2} = 3^0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ 2^x - 128 = 0 \Rightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x_2 = 7 \end{cases}$$

Ответ: 14.

В7. Для решения логарифмического неравенства нам надо получить логарифмы с одинаковыми основаниями. При этом перед логарифмами не должно быть никаких коэффициентов. То есть мы должны получить неравенство вида

$$\log_a b < \log_a c \text{ или } \log_a b > \log_a c \quad (\text{знаки неравенств могут быть и не строгими})$$

Такие неравенства решаются сравнением подлогарифмических выражений

$$\log_a b < \log_a c \Rightarrow b < c \quad \text{или} \quad \log_a b > \log_a c \Rightarrow b > c$$

ЕСЛИ ОСНОВАНИЕ ЛОГАРИФМОВ МЕНЬШЕ 1, ТО ЗНАК НЕРАВЕНСТВА БУДЕТ МЕНЯТЬСЯ!!! При решении логарифмических неравенств всегда обращайтесь на ОДЗ!!! ОДЗ всегда записываем для ИСХОДНОГО, а не преобразованного неравенства!

При решении неравенств помните, что любое число равно числу, умноженному на логарифм вида $\log_a a$. То есть $b = b \cdot \log_a a$, так как $\log_a a = 1$. При этом число a выбирается из соображений удобства (обычно a равно основанию логарифма, который уже присутствует в неравенстве). Зачем это делать? Рассмотрим пример.

ПРИМЕР. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leq -1$.

В основании логарифма, который стоит в левой части неравенства, стоит число 0,5. Поэтому

$$-1 = -1 \cdot \log_a a = -1 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} 2.$$

Следовательно, первоначальное неравенство можно переписать в виде

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leq \log_{\frac{1}{2}} 2.$$

Если основание логарифмов меньше 1, то знак неравенства будет меняться!!! Так как основание меньше 1, то знак неравенства **ПОМЕНЯЕТСЯ** на противоположный. Получим равносильную систему

$$\begin{cases} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} > 0 \\ \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \geq 2 \end{cases}$$

Первое неравенство – ОДЗ (подлогарифмическое выражение должно быть строго больше 0). Второе – само наше неравенство. А теперь вернемся к нашему неравенству.

$$\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{4-x}{x+10} \right) \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{4-x}{x+10} \right) \geq 0 \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{4-x}{x+10} \right) \geq \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} \right)^0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{4-x}{x+10} \right) \geq \log_{\frac{1}{4}} 1$$

Основание логарифмов меньше 1. Следовательно, будем менять знак неравенства

$$\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{4-x}{x+10} \right) \geq \log_{\frac{1}{4}} 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{4-x}{x+10} > 0 \\ \frac{4-x}{x+10} \leq 1 \end{cases}$$

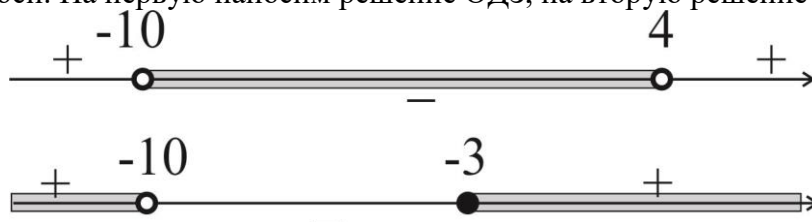
Первое неравенство – ОДЗ (подлогарифмическое выражение должно быть строго больше 0). Второе – само наше неравенство. Решим каждое из них в отдельности. Сначала ОДЗ

$$\frac{4-x}{x+10} > 0 \Rightarrow \frac{-1(x-4)}{x+10} > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+10} < 0$$

Теперь само неравенство

$$\frac{4-x}{x+10} \leq 1 \Rightarrow \frac{4-x}{x+10} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{4-x-(x+10)}{x+10} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x-6}{x+10} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2(x+3)}{x+10} \leq 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x+10} \geq 0$$

Рисуем две числовые оси. На первую наносим решение ОДЗ, на вторую решение самого неравенства.



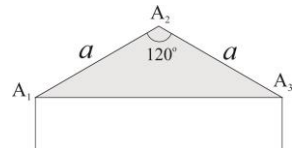
При решении систем мы берем только общие решения! Внимательно читаем задание и записываем ответ.

Ответ: -9 .

В8. Не ленимся показать на рисунке площадь какого треугольника нам дана. Так как $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильный шестиугольник, то его центральный угол равен

$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ. \text{ Значит его внутренний угол равен } 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \text{ Площадь лю-}$$

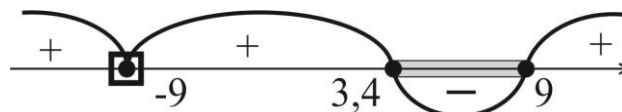
бого треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними. Следовательно, площадь данного нам треугольника равна: $S = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow a^2 = \frac{2S}{\sin 120^\circ} = 64 \Rightarrow a = 8$. Периметр шестиугольника найдите самостоятельно. **Ответ:** 48.



В9. Настоятельно рекомендую повторить теорию к задаче А13! Так как $\sqrt{3} < 2$, то $\sqrt{3} - 2 < 0$. Значит сокращая на это выражение мы обязательно должны поменять знак неравенства на противоположный. Также мы можем разложить $x^2 - 81$ через разность квадратов. Получим

$$(x - 2\sqrt{3})(x + 9)(x - 9)(x + 9) \leq 0 \Rightarrow (x - 2\sqrt{3})(x + 9)^2(x - 9) \leq 0$$

А теперь как обычно рисуем ось, наносим нули ($2\sqrt{3} \approx 2 \cdot 1,7 = 3,4$) и рисуем змейку.

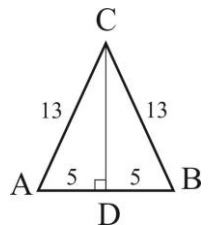


Не забываем про $-9!!!$ Всего у нас получилось 7 решений: $-9; 4; 5; 6; 7; 8$ и 9 . **Ответ:** -63 .

В10. Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO$. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC. Его высоту CD мы найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACD:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 12. \text{ Зная высоту этого треугольника найдем его площадь } S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 60.$$

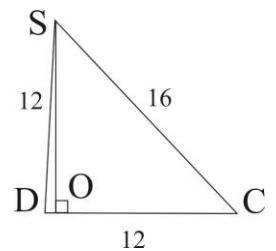


Рассмотрим боковую грань ASB (я не выделяю ее в отдельный рисунок, так как боковая грань представляет собой такой же равнобедренный треугольник как и в основании). Высота этого треугольника SD также будет равна 12. Высота пирамиды будет равна высоте треугольника SDC. Для ее нахождения воспользуемся тем, что площадь треугольника не зависит от того, каким образом ее вычислили. Зная все стороны треугольника SDC, при помощи теоремы Герона мы найдем площадь треугольника:

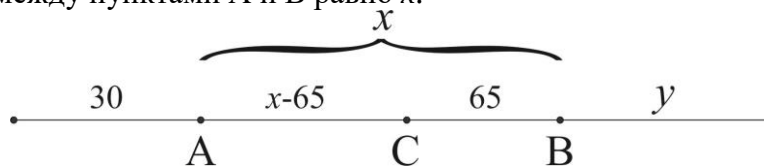
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{20 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8} = 32\sqrt{5}$. С другой стороны, площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2} CD \cdot SO \Rightarrow SO = \frac{2S}{CD} = \frac{2 \cdot 32\sqrt{5}}{12} = \frac{16\sqrt{5}}{3}. \text{ А теперь найдем объем пирамиды:}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot \frac{16\sqrt{5}}{3} = \frac{320\sqrt{5}}{3}. \text{ Ответ: } 1600.$$



В11. Пусть расстояние между пунктами А и В равно x .



Так как автобусы выехали одновременно, то до места встречи они двигались одинаковый промежуток времени. Следовательно, $t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{x-65}{v_1} = \frac{65}{v_2}$.

Через 2,5 часа после встречи второй автобус прошел расстояние $S_2 = (x-65) + 30$. Следовательно его скорость будет равна $v_2 = \frac{x-65+30}{2,5} = \frac{x-35}{2,5} \Rightarrow x = 2,5v_2 + 35$. Первый автобус за 2,5 часа после

встречи прошел расстояние $S_1 = 65 + y$. Следовательно его скорость будет равна $v_1 = \frac{65+y}{2,5}$. По условию

задачи через 2,5 часа расстояние между автобусами было в 2 раза больше, чем расстояние между пунктами А и В. Следовательно, $30 + x + y = 2x \Rightarrow y = x - 30$. Подставим найденное значение y в формулу

для скорости первого автобуса: $v_1 = \frac{65+y}{2,5} = \frac{65+x-30}{2,5} = \frac{x+35}{2,5} \Rightarrow x = 2,5v_1 - 35$. А теперь приравняем

полученные значения x и найдем связь между скоростями автобусов $2,5v_1 - 35 = 2,5v_2 + 35 \Rightarrow v_1 = v_2 + 28$

Соотношение между скоростями автобусов подставим в самое первое соотношение

$$\frac{x-65}{v_1} = \frac{65}{v_2} \Rightarrow \frac{2,5v_2 + 35 - 65}{v_2 + 28} = \frac{65}{v_2}. \text{ Полученное уравнение решите самостоятельно.}$$

У этой задачи есть очень короткое и очень красивое решение. Этим решением поделился со мной Левин Виталий Борисович, учитель математики ГУО «Средняя школа № 2 города Гомеля имени Г.М. Склезнаева». «Рассмотрим суммарную скорость. Получим, что после встречи прошло в **ДВА** раза больше времени, чем до встречи, так как после встречи автобусы суммарно проехали два расстояния между пунктами А и В. Следовательно, второй автобус после встречи проехал $2 \cdot 65 = 130$ километров и его скорость $130/2,5 = 52$ километра в час». **Ответ: 52.**

В12. Рассмотрим треугольник АОВ. Опустим перпендикуляр EF на сторону АО. Пусть $BE = x$. Тогда согласно условию задачи $EA = 6x$. Треугольники FAE и OAB

будут подобны. Следовательно, $\frac{AE}{FE} = \frac{AB}{OB}$. Сторона ОВ равна половине диагонали

квадрата (я надеюсь, что вы сами сможете ее (диагональ) найти). Найдем FE:

$$\frac{AE}{FE} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow \frac{6x}{FE} = \frac{7x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow FE = \frac{3a\sqrt{2}}{7}. \text{ Так как угол } AOB \text{ равен } 45^\circ, \text{ то } AF = FE.$$

Рассмотрим треугольник CC_1F . Сторона CF будет равна разности между диагональю основания и отрезком AF:

$$CF = CA - AF = a\sqrt{2} - \frac{3a\sqrt{2}}{7} = \frac{7a\sqrt{2} - 3a\sqrt{2}}{7} = \frac{4a\sqrt{2}}{7}$$

По теореме Пифагора из треугольника CC_1F найдем C_1F :

$$C_1F = \sqrt{CC_1^2 + CF^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{4a\sqrt{2}}{7}\right)^2} = a\sqrt{1 + \frac{16 \cdot 2}{49}} = \frac{9a}{7}$$

С этого момента возможны 2 варианта решения.

Вариант 1. Тангенс искомого угла мы найдем из прямоугольного треугольника C_1FE :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{FE}{C_1F} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{7}}{\frac{9a}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \text{ Зная тангенс, вы должны будете самостоятельно найти синус. Возникли}$$

сложности? Тогда вам подойдет второй вариант, который чуть длиннее.

Вариант 2. По теореме Пифагора для треугольника C_1FE найдем C_1E :

$$C_1E = \sqrt{C_1F^2 + FE^2} = \sqrt{\left(\frac{9a}{7}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{7}\right)^2} = \frac{a}{7} \sqrt{81 + 18} = \frac{3a}{7} \sqrt{11}$$

А теперь легко найдем синус искомого угла: $\sin \alpha = \frac{FE}{C_1E} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{7}}{\frac{3a\sqrt{11}}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. Значение искомого вы-

ражения будет равно: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \Rightarrow 4\sqrt{22} \sin \alpha = 4\sqrt{22} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 8$. **Ответ: 8.**

В конце мая я размещу на своем сайте материалы для повторения, которые будут составлены на основе задач, представленных в этом РТ. Настоятельно рекомендую скачать эти материалы и внимательно изучить их.

