В некоторых задачах я буду предлагать Вам краткие выдержки из теории. Не игнорируйте их, если хотите вникнуть в решение задачи.

А1. Вспомним определение рационального числа. Рациональное число – число, представляемое обыкновенной дробью $\frac{m}{n}$, числитель m – целое число, а знаменатель n – натуральное. Дальше сами.

P.S. Небольшая подсказка. Число $\pi = 3{,}1416\ldots$ невозможно представить в виде дроби.
Ответ: 4.

А2. Есть достаточно много видов симметрии. Важно понимать, что свойство того или иного вида симметрии заключены в самом названии этого вида. В общем случае геометрический объект называется симметричным, если после того как он был преобразован геометрически, он сохраняет некоторые исходные свойства.
Симметрия относительно точки или центральная симметрия – это такое свойство геометрической фигуры, когда любой точке, расположенной по одну сторону центра симметрии, соответствует другая точка, расположенная по другую сторону центра. При этом точки находятся на отрезке прямой, проходящей через центр и делящий отрезок пополам.
А теперь посмотрите на представленные фигуры и примените это определение к ним
Ответ: 3.

А3. Для начала немного теории. Пусть у нас имеется последовательность чисел –3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18. Очевидно, что каждое последующее число больше предыдущего числа на 3 и дальше пойдут числа 21, 24, 27 и т.д.
Арифметическая прогрессия – числовая последовательность вида
$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \ldots,\ a_1+(n-1)d,\ \ldots$$
где d – разность прогрессии. У нас она равна 3. То есть каждое последующее число больше (если прогрессия возрастающая) или меньше (если прогрессия убывающая) предыдущего на величину d.
Разность прогрессии в общем случае находится как
$$d = a_2 - a_1 \ \text{или}\ d = a_5 - a_4 \ \text{или}\ d = a_n - a_{n-1}$$
или
$$a_n = a_{n-1} + d\,.$$
Если $d > 0$ – прогрессия возрастающая, $d < 0$ – прогрессия убывающая.
Каждому члену прогрессии соответствует свой номер
$$a_1 = -3,\ a_2 = 0,\ a_3 = 3 \ \text{и т.д.}$$
n–й член арифметической прогрессии равен
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
Например
$$a_2 = a_1 + d, \qquad a_7 = a_1 + (7-1)d = a_1 + 6d$$
то есть чтобы найти второй член прогрессии надо к первому добавить одну разность прогрессии, чтобы найти седьмой – надо к первому прибавить шесть разностей прогрессии.
Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и следующего члена прогрессии:
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$
Это выражение так же часто записывают в виде
$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$
При этом верно обратное утверждение. То есть если для трех последовательных чисел справедливо это соотношение, то эти три числа образуют арифметическую прогрессию. То есть это свойство является признаком арифметической прогрессии.
Сумма n первых членов арифметической прогрессии может быть выражена формулами
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n \ \text{или}\ S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$$

Например, найдем сумму первых шести членов нашей прогрессии

$$S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} n = \frac{-3+12}{2} 6 = 27.$$

Проверим

–3+0+3+6+9+12=27.

Сумма n последовательных членов арифметической прогрессии начиная с члена k:

$$S_n = \frac{a_k + a_{k+n-1}}{2} n$$

Например, найдем сумму членов с третьего по восьмой

$$S_{3-7} = \frac{a_3 + a_8}{2} n = \frac{3+18}{2} 6 = 63$$

Проверим

3+6+9+12+15+18=63.

Учтите, что с третьего по восьмой у нас будет ШЕСТЬ членов прогрессии. То есть считать нужно так

$n = (8 – 3) +1 = 6$

Решая задачи на арифметическую прогрессию обычно сначала находят a_1 и d (составляют системы уравнений из данных задачи и просто решают их) и только потом ищут ответ на вопрос задачи.
А теперь вернемся к нашей задаче. Для того, чтобы найти сумму первый пяти членов данной нам прогрессии воспользуемся формулой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Из условия задачи найдем первый и пятый члены прогрессии

$$a_1 = 5\cdot 1+1 = 6, \quad a_5 = 5\cdot 5+1 = 26$$

А теперь найдем сумму

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2}\cdot 5 = \frac{6+26}{2}\cdot 5 = 80$$

Ответ: 5.

А4. Считается, что число записано в стандартном виде, если перед запятой стоит только одно число и это число не ноль. Дальше сами.
Ответ: 1.

А5. При решении большого количества примеров по математике надо научиться видеть преобразования. В данном случае мы должны догадаться вынести 46 за скобки

$$\frac{-6^2 + 46\cdot 3{,}1 + 2{,}9\cdot 46}{0{,}1} = \frac{-36 + 46(3{,}1+2{,}9)}{0{,}1} = \frac{-36+46\cdot 6}{0{,}1} = \frac{6\cdot(46-6)}{0{,}1} = \frac{6\cdot 40}{0{,}1} = 2400$$

Ответ: 2.

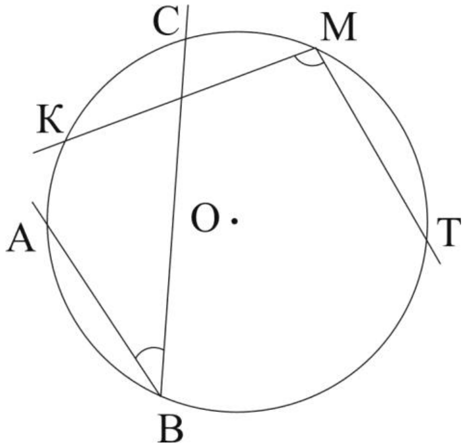
А6. В математике есть два очень важных закона.
1. Нельзя делить на ноль.
2. Под корнем четной степени должно находиться только неотрицательное выражение.

Если какой–то из этих законов не выполняется, то выражение не будет иметь смысла. При этом важно помнить, что область определения это множество значений переменной, при которой выражение будет иметь смысл. Следовательно,

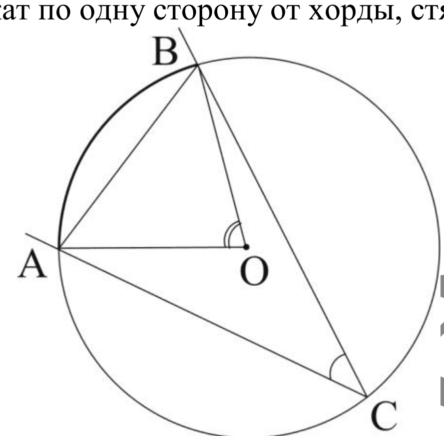
$$\begin{cases} 5 - x \ge 0 \\ x^2 - 2x - 3 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 5 \\ x \ne -1; 3 \end{cases}$$

А теперь проверяем каждое из предложенных в вариантах ответа чисел на соответствие области определения.
Ответ: 1.

А7. Вписанный угол – это угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность. На данном чертеже показаны вписанные углы ABC и KMT.



Теорема. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на его дугу, если вершины центрального и вписанного углов лежат по одну сторону от хорды, стягивающей дугу.



На данном чертеже показан вписанный углы ACB и центральный угол AOB, которые опираются на одну хорду AB, при этом угол ACB в 2 раза меньше угла AOB, то есть $\angle ACB = \frac{1}{2}\cdot\angle AOB$.

Дальше все просто. Так как по условию задачи Центральный угол на 30 градусов больше вписанного, то

$$\angle ACB + 30^{o} = \angle AOB \text{ и } \angle ACB = \frac{1}{2}\cdot\angle AOB$$

Осталось решить систему из двух уравнений
Ответ: 2.

А8. Вспомним основные свойства показательной функции.
1. $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot ......\cdot a}_{n}$ Число a – основание степени, n – показатель степени.
2. $(abc)^n = a^n b^n c^n$ или $a^n b^n c^n ... = (abc...)^n$.

3. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ или $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

4. $a^m a^n = a^{m+n}$ или $a^m a^{-n} = a^{m-n}$. Например, $x^{10}x^9 = x^{10+9} = x^{19}$ или $x^{10}x^{-9} = x^{10-9} = x^1 = x$
5. $(a^m)^n = a^{mn}$
6. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ или $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$. Например, $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$ или $\frac{x^7}{x^{-2}} = x^{7-(-2)} = x^{7+2} = x^9$.

И еще немного

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a^{-1}} = a, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$$

Для решения примера сначала применим свойство 6. Получим

$$x^{6,2} : x^{-3,8} = \frac{x^{6,2}}{x^{-3,8}} = x^{6,2-(-3,8)} = x^{10}$$

А теперь подставим значение x и используем самое последнее свойство($\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}}$). Получим

$$x^{10}=\left(\sqrt[5]{8}\right)^{10}=8^{\frac{10}{5}}=8^2=64$$

Ответ: 4.

А9. Область значений функции это значения, которые принимает переменная y. Смотрим на график и записываем ответ. Главное заметить, что на концах отрезка пустые точки. Следовательно, граничные значения не включаем!!!
Ответ: 4.

А10. Как я уже говорил в решении задания А5, в алгебре очень важно видеть преобразования. В данном случае нам надо увидеть формулу сокращенного умножения – разность квадратов. Так как $2\sqrt{5}=\sqrt{4}\sqrt{5}=\sqrt{4\cdot5}=\sqrt{20}$, то

$$\left(\sqrt{19}-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{20}\right)+3,9=\left(\sqrt{19}-\sqrt{20}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{20}\right)+3,9=$$
$$=\left(\sqrt{19}\right)^2-\left(\sqrt{20}\right)^2+3,9=19-20+3,9=2,9$$

Ответ: 3.

А11. Процентом (лат. pro centum – с сотни) называется сотая часть целого.

1 % это сотая часть числа. Например, 2 % от числа 25 находится как $\frac{2\%}{100\%}\cdot25=0,5$.

Однако можно и по–другому. Сначала находим сколько составляет один процент от 25 и потом умножаем это значение на 2 процента $\frac{25}{100\%}\cdot2\%=0,5$

Есть и третий способ. Составим пропорцию и решим ее $\begin{matrix}25-100\,\%\\ x-2\,\%\end{matrix}$

Какие рассуждения вам более понятны такие и используйте при решении задач. На мой же взгляд вариант с пропорцией дает меньший шанс на ошибку.
Если величина увеличилась на 20 %, то

$x_2=x_1+\frac{20\,\%}{100\,\%}x_1=x_1+0,2x_1=x_1\cdot1,2$, то есть величина увеличилась в 1,2 раза.

Если величина уменьшилась на 30 %, то

$x_2=x_1-x_1\frac{30\,\%}{100\,\%}=x_1-0,3x_1=x_1\cdot0,7$, то есть осталось 70% от 100% начальных.

Увеличение величины на 100 % означает, что она увеличилась в 2 раза $x_2=x_1+x_1\frac{100\,\%}{100\,\%}=x_1+x_1=2x_1$.

Увеличение величины на 300 % означает, что она увеличилась в 4 раза $x_2=x_1+x_1\frac{300\,\%}{100\,\%}=x_1+3x_1=4x_1$.

А теперь вернемся к задаче. Смотрим на диаграмму. Во вторник было 25 человек. В среду 40. Составим пропорцию

$$\begin{matrix}25-100\,\%\\ 40-x\,\%\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{40\cdot100\%}{25}=160\%$$

То есть количество людей выросло на 60%. Осталось применить этот метод к остальным дням.
Ответ: 2.

А12. Чтобы найти косинус надо обязательно знать либо градусную меру угла, либо все стороны прямоугольного треугольника. Поэтому применим теорему Пифагора

$$AB^2=AC^2+BC^2\quad\Rightarrow\quad AB^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2=3+4=7\quad\Rightarrow\quad AB=\sqrt{7}$$

А теперь вспомним, что косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе, и найдем это значение

$$\cos(B) = \frac{CB}{AB} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

Может случиться так, что вы не найдете такой вариант ответа. Не стоит паниковать. Может быть надо просто избавиться от иррациональности в знаменателе

$$\cos(B) = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Ответ: 3.

А13. По условию задачи

$$\frac{6+x}{3} - \frac{7-x}{5} = 5\frac{2}{5}$$

Нам предлагают решить простое уравнение. Приведем все дроби к общему знаменателю. При этом не забываем из правильной дроби $5\frac{2}{5}$ сделать неправильную. Получим

$$\frac{6+x}{3} - \frac{7-x}{5} = \frac{27}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{5(6+x)}{15} - \frac{3(7-x)}{15} = \frac{3\cdot 27}{15}$$

Так как в знаменателе нет переменной мы про него «забываем». Далее надо раскрыть скобки и привести подобные. И как всегда надо быть очень аккуратным при раскрытии скобок, перед которыми стоит отрицательное число. Не забываем поменять все знаки внутри скобок на противоположные

$$5(6+x) - 3(7-x) = 81 \quad \Rightarrow \quad 30 + 5x - 21 + 3x = 81 \quad \Rightarrow \quad 8x = 72 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

Ответ: 5.

А14. Очевидно, что плот не имеет собственных двигателей и поэтому его скорость будет равна скорости течения реки. Поэтому мы легко найдем время движения плота

$$\upsilon_p = \frac{S_{плота}}{t_{плота}} \quad \Rightarrow \quad t_{плота} = \frac{S_{плота}}{\upsilon_p} = \frac{7,2\ км}{3\ км/ч} = 2,4 \text{ (часа).}$$

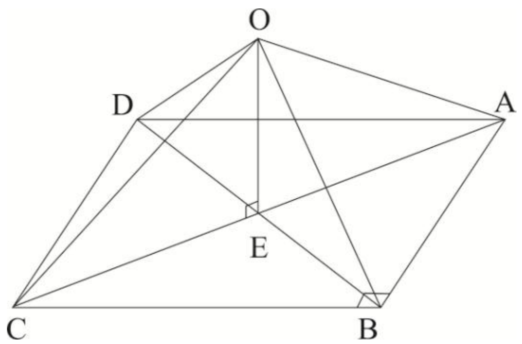
По условию задачи это время равно времени движения лодки. Очевидно, что оно будет состоять из двух времен – времени движения по течению и времени движения против течения. Пусть расстояние от А до В равно *x*. Тогда время общее время движения лодки будет равно

$$t = t_1 + t_2 \quad \Rightarrow \quad 2,4 = \frac{x}{27+3} + \frac{x}{27-3}$$

Дальше сами.
Ответ: 4.

А15. Объем пирамиды находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}S_{осн}h$$



По условию задачи нам дана правильная четырехугольная пирамида. Это значит, что в основании пирамиды лежит квадрат. Его площадь найти не проблема. Найдем высоту. Рассмотрим треугольник COE. По теореме Пифагора

$$h = OE = \sqrt{CO^2 - CE^2}$$

Отрезок CE равен половине диагонали квадрата ABCD. Диагональ квадрата найдем по той же теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

Дальше сами.
Ответ: 2.

А16. С самого начала раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$y=5-(x-2)^2=5-(x^2-4x+4)=-x^2+4x+1$$

График такой функции представляет собой параболу. Возможны 6 вариантов графиков таких функций.

Ветви смотрят вверх

Если коэффициент a перед x^2 положителен, то ветви параболы будут смотреть вверх. И тут возможно три подварианта.

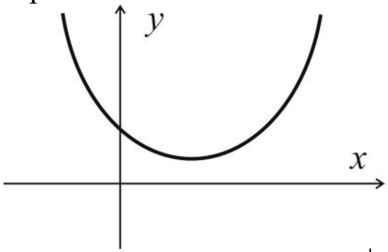


График 1.
Дискриминант отрицателен. График функции никогда не пересечет ось OX. Значение такой функции будет всегда положительным.

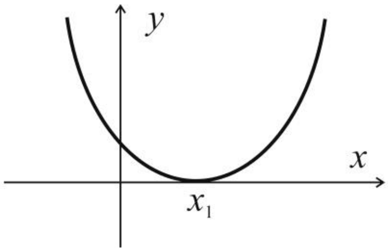


График 2.
Дискриминант равен нулю. График функции пересекает ось OX в одной точке, которая будет являться корнем уравнения. Значение такой функции будет всегда положительным кроме этой одной точки. В этой точке функция обращается в ноль.

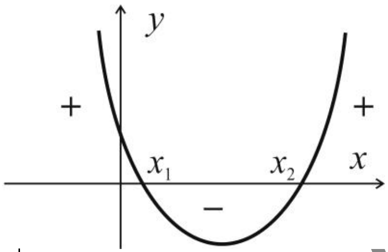


График 3.
Дискриминант больше нуля. График функции пересекает ось OX в двух точках, которые будут являться корнями уравнения. Значение такой функции будет всегда положительным до первого (наименьшего) корня, потом будет отрицательным до второго корня, после которого опять станет положительным. В точках x_1 и x_2 функция обращается в ноль.

Ветви смотрят вниз

Если коэффициент a перед x^2 отрицателен, то ветви параболы будут смотреть вниз. Тут тоже возможно три подварианта.

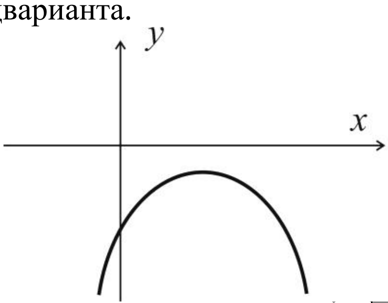


График 4.
Дискриминант отрицателен. График функции никогда не пересечет ось OX. Значение такой функции будет всегда отрицательным.

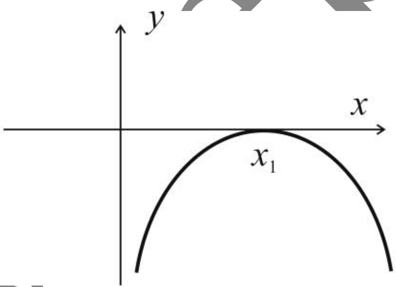


График 5.
Дискриминант равен нулю. График функции пересекает ось OX в одной точке, которая будет являться корнем уравнения. Значение такой функции будет всегда отрицательным кроме этой одной точки. В этой точке функция обращается в ноль.

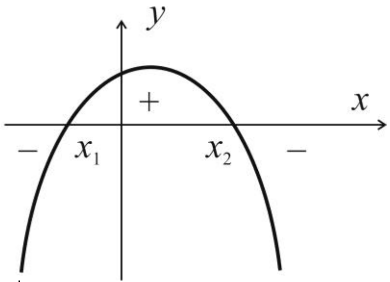


График 6.
Дискриминант больше нуля. График функции пересекает ось OX в двух точках, которые будут являться корнями уравнения. Значение такой функции будет всегда отрицательным до первого (наименьшего) корня, потом будет положительным до второго корня, после которого опять станет отрицательным. В точках x_1 и x_2 функция обращается в ноль.

Так же не лишним будет знать, что абсцисса вершины параболы равна $x=\dfrac{-b}{2a}$. А теперь используйте эту теорию при решении задачи.

Ответ: 5.

А17. Прежде чем приводить дроби к общему знаменателю вспомним, что квадратичный трехчлен можно разложить на множители по формуле

$$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)$$

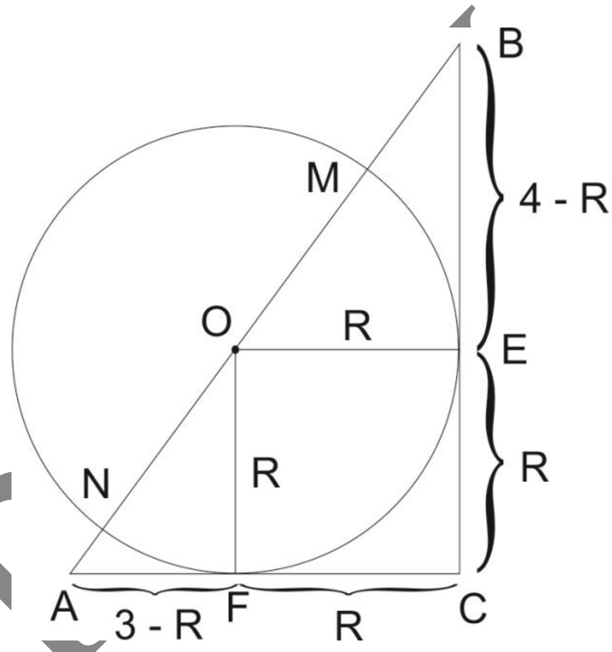
где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. То есть в нашем случае

$$a^2+a-6=0 \Rightarrow D=25 \Rightarrow \begin{matrix} a_1=-3 \\ a_2=+2 \end{matrix} \Rightarrow a^2+a-6=\left(a-(-3)\right)(a-2)=(a+3)(a-2)$$

Если вы не уверены в том, что правильно разложили трехчлен, просто раскройте скобки. Если после раскрытия вы получили оригинальное выражение – вы все сделали правильно. Не сходится – есть ошибка. С учетом этого преобразования получим

$$\frac{a}{a+3}+\frac{10a}{a^2+a-6}:\frac{5}{a-2}=\frac{a}{a+3}+\frac{10a}{(a+3)(a-2)}\cdot\frac{a-2}{5}=\frac{a}{a+3}+\frac{2a}{a+3}=\frac{3a}{a+3}$$

Ответ: 1.



A18. Задачи такого плана всегда надо начинать с рисунка. И никогда не жалейте место для рисунка. На мой взгляд для такой задачи нужен рисунок размером минимум с половину листа А4 формата.
По условию задачи нам надо найти отрезок АО. Очевидно, что OECF – квадрат. Так как треугольники OBE и AOF подобны, то

$$\frac{BE}{OF}=\frac{EO}{FA} \Rightarrow \frac{4-R}{R}=\frac{R}{3-R}$$

Перемножаем равенство крест–накрест. Получаем (раскрытие скобок и приведение подобных оставляю вам)

$$(4-R)(3-R)=R^2 \Rightarrow R=\frac{12}{7}$$

По теореме о касательной и секущей

$$AF^2=AN\cdot AM$$

Из рисунка видно, что отрезок AM = AN + 2R. Значит

$$AF^2=AN\cdot AM \Rightarrow AF^2=AN\cdot(AN+2R)$$

Подставляем числа. Для удобства расчетов обозначим AN = x. Получим

$$\left(3-\frac{12}{7}\right)^2=x\cdot\left(x+2\cdot\frac{12}{7}\right) \Rightarrow \left(\frac{9}{7}\right)^2=x^2+x\frac{24}{7} \Rightarrow x^2+x\frac{24}{7}-\frac{81}{49}=0$$

У уравнения два корня – положительный и отрицательный. Нас интересует только положительный, который равен 3/7. Значит AN = 3/7. Тогда отрезок AO = AN + NO = 3/7 + 12/7 = 15/7
Ответ: 1.

Часть В

B1. Задачи на работу подобны задам на движение. Только вместо скорости движения будет производительность, а вместо пройденного пути проделанная работа.
Время выполнения работы равно отношению проделанной работы к производительности

$$t=\frac{A}{Производительность}.$$

Обычно при решении задач всю работу принимают за единицу. Поэтому

$$t=\frac{1}{Производительность}$$

Производительность двух станков будет равна сумме производительностей первого (x) и второго (y) станка

$$t=\frac{1}{x+y}$$

Производительность каждого станка равна отношению проделанной работы ко времени ее выполнения

$$x=\frac{A}{t_1}=\frac{1}{4}; \qquad y=\frac{A}{t_2}=\frac{1}{6}$$

Подставим производительности в первое уравнение. Получим

$$t=\frac{1}{x+y}=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{1}{\frac{6+4}{24}}=2,4\ \textit{часа}=2,4\cdot 60\ \textit{минут}=144\ \textit{минуты}$$

Ответ: 144.

B2. Как только в уравнении вы видите корень будьте готовы к тому, что вас будут ловить на ОДЗ!
В целом иррациональные уравнения решаются просто. В этом уравнении сразу же сделаем очевидную замену. Пусть $x^2 = t$. Тогда

$$t-2\sqrt{t-18}=53 \;\Rightarrow\; t-53=2\sqrt{t-18}$$

А теперь самое главное. При решении этого уравнения мы получим корни. И важно понимать, что не все корни подойдут. Как отсеять лишние? Значение корня четной степени всегда не отрицательно. Поэтому выражение (t – 53) так же должно быть больше нуля. Следовательно

$$t-53\geq \;\Rightarrow\; t\geq 53$$

Возведем обе части уравнения во вторую степень

$$\left(t-53\right)^2=\left(2\sqrt{t-18}\right)^2 \;\Rightarrow\; t^2-106t+2809=4t-72 \;\Rightarrow\; t^2-110t+2881=0$$

Мда… Числа не очень. Тут есть два варианта развития событий. Смелые могут начинать считать дискриминант и искать корни. Корни будут равны 67 и 43. Не забывая откинуть второй корень (не подходит по ОДЗ) мы получим

$$t=67 \;\Rightarrow\; x^2=67 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x_1=\sqrt{67} \\ x_2=-\sqrt{67} \end{matrix} \;\Rightarrow\; x_1\cdot x_2=\sqrt{67}\cdot\left(-\sqrt{67}\right)=-67$$

А что делать всем остальным? Им надо попытаться найти еще один способ решения. Немного преобразуем уравнение

$$x^2-2\sqrt{x^2-18}=53 \;\Rightarrow\; x^2-53=2\sqrt{x^2-18} \;\Rightarrow\; x^2-18-35=2\sqrt{x^2-18}$$

Пусть $\sqrt{x^2-18}=t$. Тогда $x^2-18=t^2$. Получим

$$t^2-35=2t \;\Rightarrow\; t^2-2t-35=0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} t_1=7 \\ t_2=-5 \end{matrix}$$

Второй корень не подходит по смыслу. Работаем с первым корнем

$$\sqrt{x^2-18}=t \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2-18}=7 \;\Rightarrow\; x^2-18=49 \;\Rightarrow\; x^2=67$$

В итоге мы получили точно такой же ответ. Какой выбрать способ решения решать вам.
Ответ: –67.

B3. Очень простая система, которая легко решается методом подстановки. Для начала я предложу вашему вниманию простой пример.

ПРИМЕР. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ x+3y=5 \end{cases}$.

Из первого уравнения выразим x через коэффициенты и y и получим $x=\dfrac{2y+4}{3}$. Подставляем это выражение во второе уравнение. Получаем

$$\frac{2y+4}{3}+3y=5$$

Решаем уравнение и находим y =1. Теперь находим x, подставляя найденное значение вместо y в выражение для x. Получаем

$$x=\frac{2\cdot 1+4}{3}=2\ .$$

Ответ записывается в виде пары чисел, на первом месте всегда x, на втором месте y.
Ответ: (2; 1).

Вроде бы все отлично. Задача решена, ответ получен. Однако при решении этого примера мы сами себе усложнили жизнь. Перед тем, как выражать одну из переменных, надо посмотреть, какую из переменных и из какого уравнения проще выразить. В разобранной только что системе гораздо удобнее было

бы выразить x из второго уравнения $x = 5 - 3y$ и подставить в первое. При таком способе мы не получаем дроби и нам не надо приводить к общему знаменателю.
Поэтому всегда при решении систем старайтесь спрогнозировать дальнейшее решение. По условию задачи нам надо найти сумму $y_1 + y_2$. А это значит, что x_1 и x_2 мы не знаем и знать не хотим. Поэтому выразим x из первого уравнения и подставим во второе. Получим

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ (x-2)^2+(y+3)^2=40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ (3-y-2)^2+(y+3)^2=40 \end{cases} \Rightarrow 1-2y+y^2+y^2+6y+9=40 \Rightarrow$$

$$2y^2+4y-30=0 \Rightarrow y^2+2y-15=0$$

Дальше сами.
Ответ: –2.

B4. **Цифры нельзя путать с числами.**
Цифры: 0; 1; 2: 3; 4: 5; 6; 7; 8; 9 – всего десять цифр, с помощью которых записывается любое число. При решении задач учитывайте, что не бывает цифр других, кроме этих десяти.
Двузначное число записывается как $10x + y$, где y – цифра единиц, x – цифра десятков.
Трехзначное число записывается как $100x + 10y + z$, где z – цифра единиц, y – цифра десятков, x – цифра сотен.
Вы можете встретить такую запись $\overline{xyz}$.
Она означает, что число записано цифрами x, y, z.
Всегда, увидев такую запись, заменяйте

$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

ПРИМЕР. *Найти двузначное число, если известно, что при делении этого числа на сумму его цифр в частном получится 4 и в остатке 3. Если же из искомого числа вычесть удвоенную сумму его цифр, то получится 25.*
Если число a при делении на число b дает число c, то $a = b \cdot c$.
Если число a при делении на число b дает число c, а в остатке получается число d, то

$a = b \cdot c + d$ *(запомните эту запись; мы ее используем чуть ниже)*

Число c называется неполным частным.
Теперь вернемся к задаче Пусть x – делитель нашего числа. Тогда неполное частное равно $(x + 3)$. Остаток при этом будет равен $(x + 3 – 7)$. А теперь используем соотношение приведенное выше

$$73 = x(x+3) + (x+3-7)$$

Раскрываем скобки. Приводим подобные. Решаем квадратное уравнение. И не забываем, что ответ – натуральное число (то есть число целое и большее нуля).
Ответ: 7

B5. Перед тем как читать решение данного примера обязательно скачайте у меня с сайта главу 1 «Уравнения» и прочитайте параграф 1.05.
Надо догадаться перемножить вторую и третью скобки. Получим

$$(x^2+x)(x-1)(x+2)=35 \Rightarrow (x^2+x)(x^2+x-2)=35$$

Пусть $x^2 + x = t$. Тогда уравнение примет вид

$$t(t-2)=35 \Rightarrow t^2-2t-35=0 \Rightarrow \begin{matrix} t_1=7 \\ t_2=-5 \end{matrix}$$

А теперь вспомним чему равно t. Получим два уравнение

$$\begin{matrix} x^2+x=7 \\ x^2+x=-5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2+x-7=0 \\ x^2+x+5=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} D>0 \Rightarrow x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-1 \\ D<0 \Rightarrow \textit{нет корней} \end{matrix}$$

Ответ: –1.

B6. Для решения этого задания нам понадобиться метод интервалов. Ниже я вам предлагаю достаточно большой объем теории. Не игнорируйте его!

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств и основан на правиле определения знака произведения или частного нескольких множителей, из которого следует, что при перемене знака, одного из сомножителей изменяется знак произведения или частного.

Поняли что–нибудь? Думаю что нет, так как описывать теоретически метод интервалов весьма сложное занятие. Проще показать все на примере.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $(6–x)(x+3)\le 0$

При решении неравенств всегда делайте так, чтобы все выражения в неравенстве были вида ($x \pm a$), а не ($a \pm x$) и чтобы не было минусов перед выражениями (скобками)! Зачем это делать? Объяснение чуть ниже.

У нас неравенство записано не так, как нам надо. Но это ничего страшного. Вынесем –1 из первой скобки. Получим

$$-(x-6)(x+3)\le 0$$

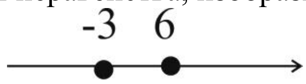
Сокращая на –1 не забываем поменять знак неравенства на противоположный

$$(x-6)(x+3)\ge 0$$

Вот теперь мы получили неравенство именно в том виде, в котором нам нужно и мы можем приступать к решению. Найдем значения, при которых каждое из выражений в скобках обращается в ноль.

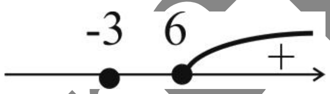
$$x-6=0 \Rightarrow x=6 \text{ и } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

Нанесем полученные корни на числовую прямую (смотрите рисунок ниже). Так как неравенство нестрогое и эти корни являются решениями неравенства, изобразим их черными точками.

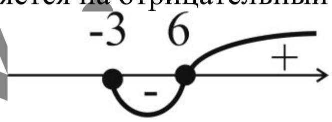


Если все множители неравенства записаны в виде($x \pm a$) и перед скобками отсутствуют знаки «минус», то значение такого неравенства при бесконечно большом числе (то есть на бесконечности) всегда будет положительно!!!

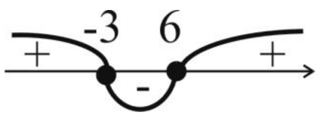
Не верите? Можем проверить. Пусть x=7, тогда $(x–6)(x+3) = (7–6)(7+3)=1\cdot 10=10>0 \Rightarrow$ выражение положительно



А дальше все просто. Мы должны нарисовать змейку. Так как мы имеем дело с простым неравенством (каждый из множителей неравенства уникален (не повторяется) и находится в первой степени), то в каждой критической точке (когда все выражение обращается в ноль) будет происходить смена знака неравенства. В точке 6 знак неравенства меняется на отрицательный



В точке 3 обратно на положительный



Так как знак нашего неравенства «≥», то нас интересуют только положительные либо равные нулю значения левой части неравенства. Следовательно, нашему неравенству удовлетворяют два промежутка: $(-\infty; -3]$ и $[6; +\infty)$.

И еще один пример.

ПРИМЕР: *Найдите наибольшее целое решение неравенства* $(x-2)(x^2+x-6)<0$

Найдем корни и разложим квадратный трехчлен на множители.

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x_1=-3,\ x_2=2 \Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

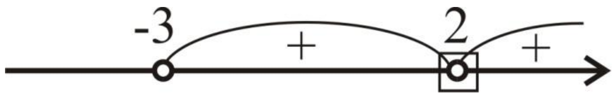
Перепишем неравенство в новом виде

$$(x-2)(x-2)(x+3)<0 \Rightarrow (x-2)^2(x+3)<0$$

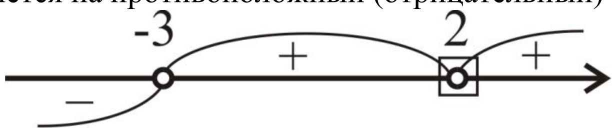
При нанесении точек нулей функции на числовую ось вокруг таких точек рисуем квадрат.

Так как мы оформили неравенство правильно, то согласно пункту 3 (см. выше) на бесконечности значение функции положительно

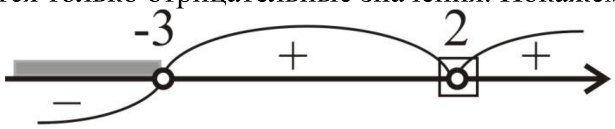
При переходе через точку 2 знак функции не поменяется, так как выражение (x – 2) возводится в **ЧЕТНУЮ** степень!!!



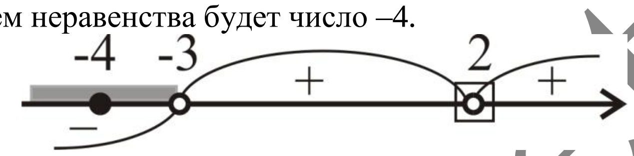
В точке –3 знак функции меняется на противоположный (отрицательный)



Решением неравенства являются только отрицательные значения. Покажем их штриховкой



Следовательно, нас удовлетворяют решения от минус бесконечности, до –3 (не включительно). Значит, наибольшим целым решением неравенства будет число –4.



Ответ: –4.

Метод интервалов для рациональных функций можно сформулировать в следующем виде.

1. Привести неравенство к стандартному виду $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$, то есть, чтобы слева была дробь, а справа был ноль.
2. Разложить на множители многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (как мы знаем, для этого придётся решить уравнения $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$). Другими словами надо сделать так, чтобы в числителе и знаменателе дроби были только произведения скобок вида $(x \pm a)$, где a – число. В некотором плане это подобно методы решения уравнений, который мы прошли в первой главе.
3. Нули числителя, не совпадающие с нулями знаменателя, отметить на числовой оси **точками** (если неравенство нестрогое; если строгое – кружочками), а нули знаменателя − **кружочками** (на ноль делить нельзя).

ЕЩЕ РАЗ НАПОМНЮ, ЧТО ЕСЛИ ВСЕ МНОЖИТЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНЫ В ВИДЕ ($x \pm a$) И НЕТ МИНУСОВ ПЕРЕД СКОБКАМИ, ТО ЗНАЧЕНИЕ ТАКОЙ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ БУДЕТ ВСЕГДА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ!!!

Провести кривую знаков, проходя через все точки, отмеченные на числовой прямой, меняя или не меняя знак в зависимости от степени двучлена, отвечающего данной точке.
4. Записать ответ, обращая особое внимание на граничные точки, часть из которых может быть «выколота».

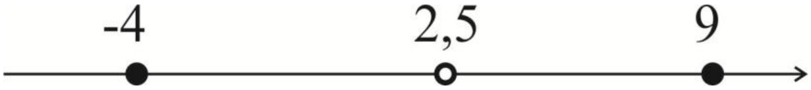
А теперь вернемся к нашему неравенству. Перенесем все слагаемые в левую часть неравенства и приведем к общему знаменателю. **НИКОГДА НЕ ДОМНОЖАЙТЕ (СОКРАЩАЙТЕ) НА ЗНАМЕНАТЕЛЬ, ЕСЛИ В НЕМ ЕСТЬ ПЕРЕМЕННАЯ!!!!! ЕГО НУЖНО СОХРАНИТЬ ДО КОНЦА РЕШЕНИЯ!!!**

$$2x-5 \le \frac{169}{2x-5} \;\Rightarrow\; \frac{2x-5}{1}-\frac{169}{2x-5} \le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(2x-5)^2-169}{2x-5} \le 0$$

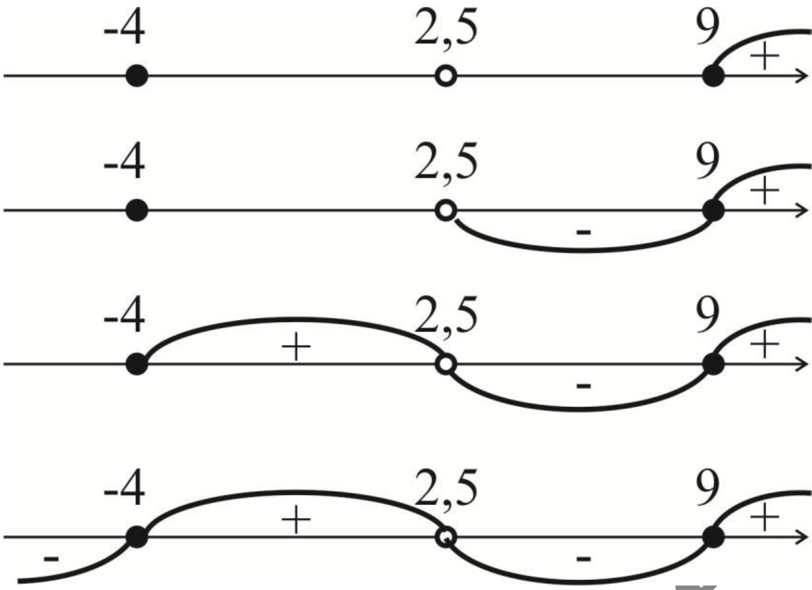
Да, можно раскрыть скобки в числителе и привести подобные. А можно чуть схитрить. Для этого надо увидеть в числителе разность квадратов

$$\frac{(2x-5)^2-13^2}{2x-5} \le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(2x-5-13)(2x-5+13)}{2x-5} \le 0 \;\Rightarrow\; \frac{(2x-18)(2x+8)}{2x-5} \le 0 \;\Rightarrow\; \frac{2(x-9)2(x+4)}{2(x-2,5)} \le 0$$

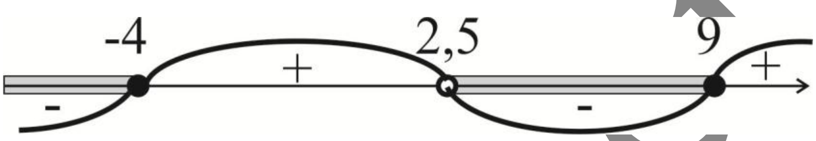
Нанесем нули на числовую ось. При этом нули числителя не выкалываем!!!



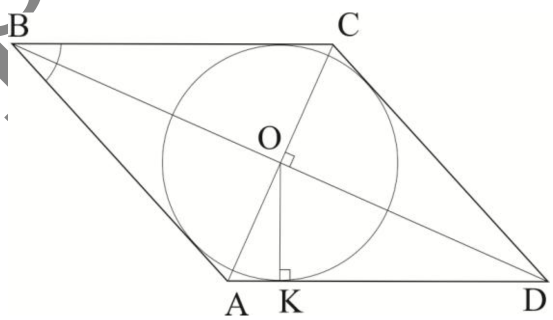
Рисуем змейку



Обозначаем решения



По условию задачи нам надо найти количество натуральных решений неравенства. Натуральными будут целые числа, которые принадлежат промежутку от 2,5 до 9 (включительно): 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Всего 7 чисел.
Ответ: 7.



B7. Простая задача. Начинаем как обычно с рисунка.
По определению площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Значит и будем их искать.
Отрезок OF равен радиусу окружности. Отрезок AK дан по условию задачи. Следовательно, мы легко найдем половину меньшей диагонали – отрезок AO

$$AO = \sqrt{AK^2 + KO^2} = \sqrt{3+12} = \sqrt{15}$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник AOD (диагонали в ромбе перпендикулярны). В нем отрезок OK это высота, проведенная к гипотенузе. А эта высота обладает одним очень важным свойством – квадрат этой высоты равен произведению отрезков, на которые она разделила гипотенузу. Поэтому

$$OK^2 = AK \cdot KD \;\Rightarrow\; \left(2\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3} \cdot KD \;\Rightarrow\; KD = 4\sqrt{3}$$

А теперь найдем половину большей диагонали. Рассмотрим прямоугольный треугольник KOD

$$OD = \sqrt{OK^2 + KD^2} = \sqrt{12+48} = \sqrt{60} = \sqrt{4}\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

Дальше сами.
Ответ: 60.

B8. Самое главное при решении этого примера не паниковать ;–)
Перенесем все слагаемые в левую сторону и приведем дроби к общему знаменателю. Получим

$$\frac{5x^2+3|x|}{5} < \sqrt{3} + \frac{2x^2+\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \frac{5x^2+3|x|}{5} - \frac{\sqrt{3}}{1} - \frac{2x^2+\sqrt{3}}{2} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{2\left(5x^2+3|x|\right) - 10\sqrt{3} - 5\left(2x^2+\sqrt{3}\right)}{10} < 0$$

О знаменателе можем забыть, так как в нем нет переменной. Раскрываем скобки и приводим подобные

$$2\left(5x^2+3|x|\right) - 10\sqrt{3} - 5\left(2x^2+\sqrt{3}\right) < 0 \;\Rightarrow\; 10x^2 + 6|x| - 10\sqrt{3} - 10x^2 - 5\sqrt{3} < 0 \;\Rightarrow\; 6|x| - 15\sqrt{3} < 0$$

$$6|x| < 15\sqrt{3} \;\Rightarrow\; |x| < \frac{15}{6}\sqrt{3} \;\Rightarrow\; |x| < \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

Мы получили достаточное простое неравенство с модулем!!! Немного теории.
Неравенства с модулем можно разделить на три основных типа:
1. В левой части неравенства находится выражение под модулем. В правой – все остальное. При этом модуль **меньше** выражения справа.
2. В левой части неравенства находится выражение под модулем. В правой – все остальное. При этом модуль **больше** выражения справа.
3. Сложные неравенства с модулем.

Основные способы решений неравенств с модулем во многом совпадают с методами решения уравнений с модулем. Единственное отличие связано с тем, что, решая неравенства с модулем (как, впрочем, и неравенства вообще), нужно очень внимательно совершать равносильные переходы и следить не только за тем, чтобы не приобрести новые решения, но и за тем, чтобы не потерять уже имеющиеся.
Стандартный путь решения неравенств с модулем заключается в том, что координатная прямая разбивается на промежутки (границами этих промежутков являются нули подмодульных выражений), а затем неравенство решается на каждом из промежутков.
Этот метод работает всегда. Правда, в отдельных случаях может быть затруднена его техническая реализация. Например, когда очень тяжело или невозможно найти корни подмодульных выражений. Однако, это сложности иного плана. Нужно понимать, что раскрытие модуля по определению неизменно приводит к цели. Конечно же, этот метод не является оптимальным: в условиях централизованного тестирования важен не только результат, но и то время, которое потрачено на его получение.
Рассмотрим методы, не связанные с поиском нулей функций, стоящих под знаком модуля.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $|2x-3|<5$.

Разумеется, это неравенство можно решить просто раскрыв модуль (как мы это делается при решении уравнений). Однако в подобных примерах, **когда в одной части модуль, а в другой все остальное и при этом модуль МЕНЬШЕ выражения, стоящего по другую сторону знака неравенства,** удобно пользоваться следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. Неравенства вида $|f(x)|<g(x)$ равносильно **СИСТЕМЕ**

$$\begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>-g(x) \end{cases}$$

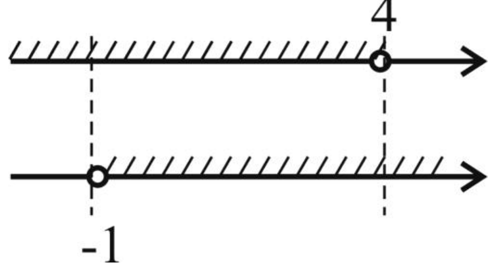
В частности, неравенство вида $|f(x)|<a$ (a>0) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)<a \\ f(x)>-a \end{cases}$$

Таким образом, у нас получается система

$$\begin{cases} 2x-3<5 \\ 2x-3>-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x>-1 \end{cases}$$

Не ленитесь делать пояснительные рисунки!!!



Так как мы имеем дело с системой неравенств, то мы берем только общие решения.
Ответ: $-1 < x < 4$.
Как запомнить, что в данном случае у нас будет именно система, а не совокупность? Важное мнемоническое правило. **Если модуль МЕНЬШЕ, то решений будет МАЛО. Следовательно, будет система, так как при решении системы мы берем только ОБЩИЕ решения.**
А дальше постарайтесь сами решить этот пример. Задача В8 в помощь.
Ответ: **–**36.

B9. Произведение двух выражений равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а второй имеет смысл. Следовательно

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x-\cos\dfrac{\pi}{3}=0 \\ \cos 2x+\dfrac{\pi}{3}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x=\dfrac{1}{2} \\ \cos 2x=-\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

Второе уравнение не имеет решений, так как значение синуса и косинуса любого угла лежит в пределах от –1 до +1. Решим первое уравнение

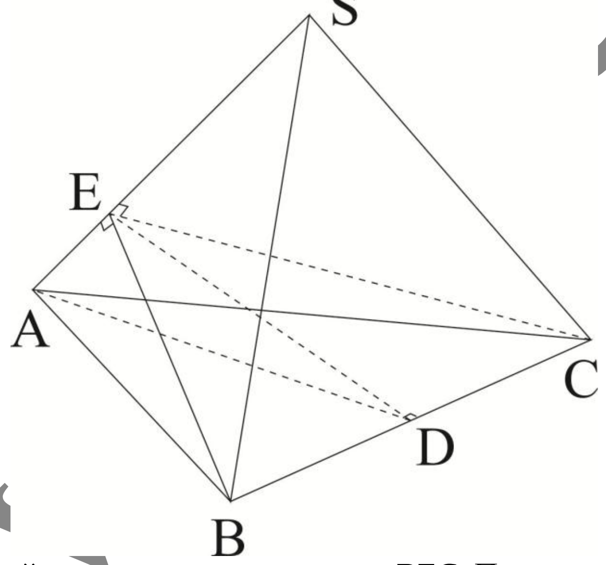
$$\sin 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_1=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \\ 2x_2=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi}{12}+\pi k \\ x_2=\dfrac{5\pi}{12}+\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{180}{12}+180k \\ x_2=\dfrac{5\cdot 180}{12}+180k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=15+180k \\ x_2=75+180k \end{array}\right.$$

Подставляя вместо k число –1 найдем два отрицательных корня

$$\left[\begin{array}{l} x_1=15+180k \\ x_2=75+180k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=15+180(-1) \\ x_2=75+180(-1) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-165 \\ x_2=-105 \end{array}\right.$$

Ответ: –105.

B10. Начнем с рисунка. Из вершин B и C проведем перпендикуляры к боковому ребру AS. Из вершины A треугольника ABC опустим высоту на основание BC.



По условию задачи нам надо найти площадь треугольника BEC. По определению площадь треугольника равна половине произведения основания и проведенной к нему высоты

$$S_{BEC}=\frac{1}{2}BC\cdot ED$$

Высоту ED найдем из прямоугольного треугольника AED (почему он прямоугольный подумайте сами). Для этого нам понадобится синус угла между боковым ребром и основанием

$$\sin(EAD)=\frac{ED}{AD} \Rightarrow ED=AD\sin(EAD),$$

Отрезок AD – высота (а так же и медиана; не забывайте про это) треугольника ABC. Этот отрезок мы легко найдем по теореме Пифагора

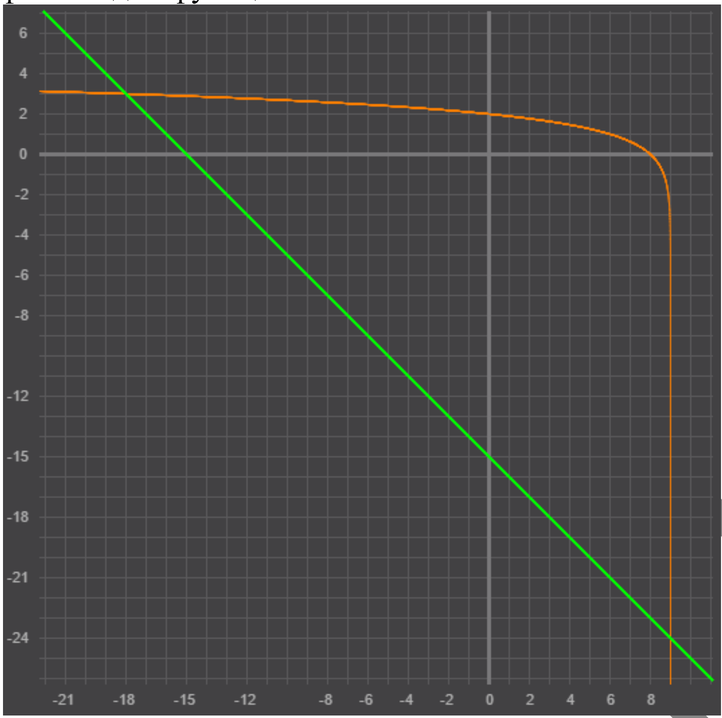
$$AB^2=AD^2+BD^2 \Rightarrow AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=AB\frac{\sqrt{3}}{2}$$

так как BD=BC/2=AB/2. Осталось только подставить числа и вычислить.
Ответ: 189.

B11. Для решения этого задания важно знать особенности построения графика логарифмической и линейной функций. Разобьем наше уравнение на две функции

$$y_1=\log_3(9-x) \text{ и } y_2=-x-15$$

Построим схематично график каждой функции



Количество точек пересечения графиков функций равно количеству корней уравнения. В нашем случае корней будет два. Один из коней (отрицательный) надо подобрать. Как это сделать? Подберем число x такое, чтобы в подлогарифмическом выражении было число, которое можно записать как 3^n. В нашем случае таких вариантов не много. Он будет равен –18. Можно подставить его в уравнение и посмотреть получится ли тождество. Следовательно, произведение меньшего корня на количество корней будет равно –36.

Ответ: –36.

B12. Попытаемся преобразовать выражение. Для начала упросим подкоренное выражение

$$5+\left(\frac{x^2-5}{2x}\right)^2=5+\frac{x^4-10x^2+25}{4x^2}=\frac{20x^2+x^4-10x^2+25}{4x^2}=\frac{x^4+10x^2+25}{4x^2}=\left(\frac{x^2+5}{2x}\right)^2.$$

Запомните одно очень важное свойство!

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

С учетом этого свойства

$$\sqrt{5+\left(\frac{x^2-5}{2x}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{x^2+5}{2x}\right)^2}=\left|\frac{x^2+5}{2x}\right|=\frac{x^2+5}{2|x|}$$

Модуль с числителя мы сняли потому, что числитель ни при каких значениях переменной не может быть отрицательным. Вернемся к условию задачи. С учетом этого преобразования мы получим

$$\frac{34\cdot\frac{x^2+5}{2|x|}}{\left(x^2+5\right)\frac{1}{x}}-9=\frac{34\left(x^2+5\right)}{\left(x^2+5\right)\frac{2|x|}{x}}-9=\frac{34x}{2|x|}-9=\frac{17x}{|x|}-9$$

А теперь раскроем модуль.

При $x>0$

$$\frac{17x}{|x|}-9=\frac{17x}{x}-9=8$$

При $x<0$

$$\frac{17x}{|x|}-9=\frac{17x}{-x}-9=-26$$

Ответ: –26.